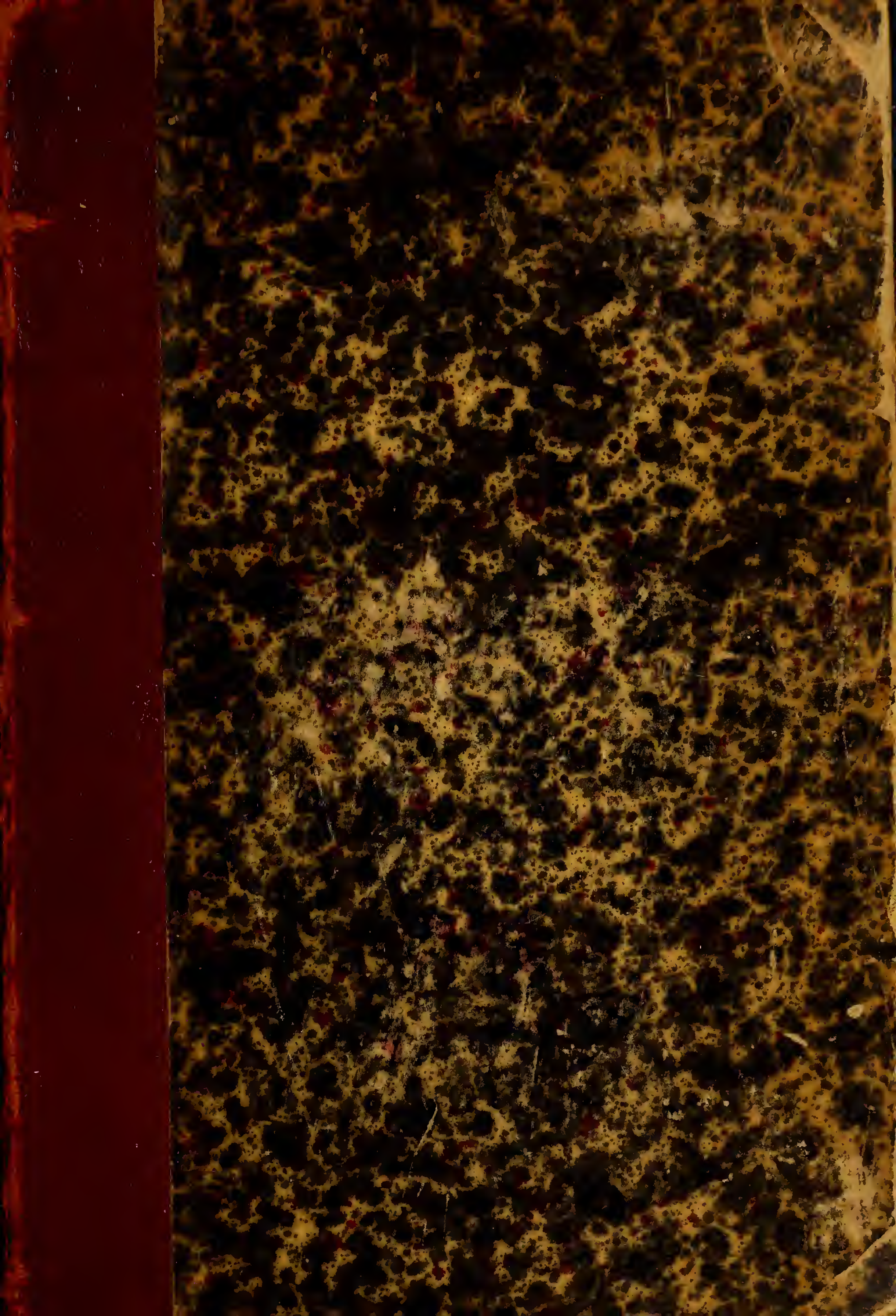
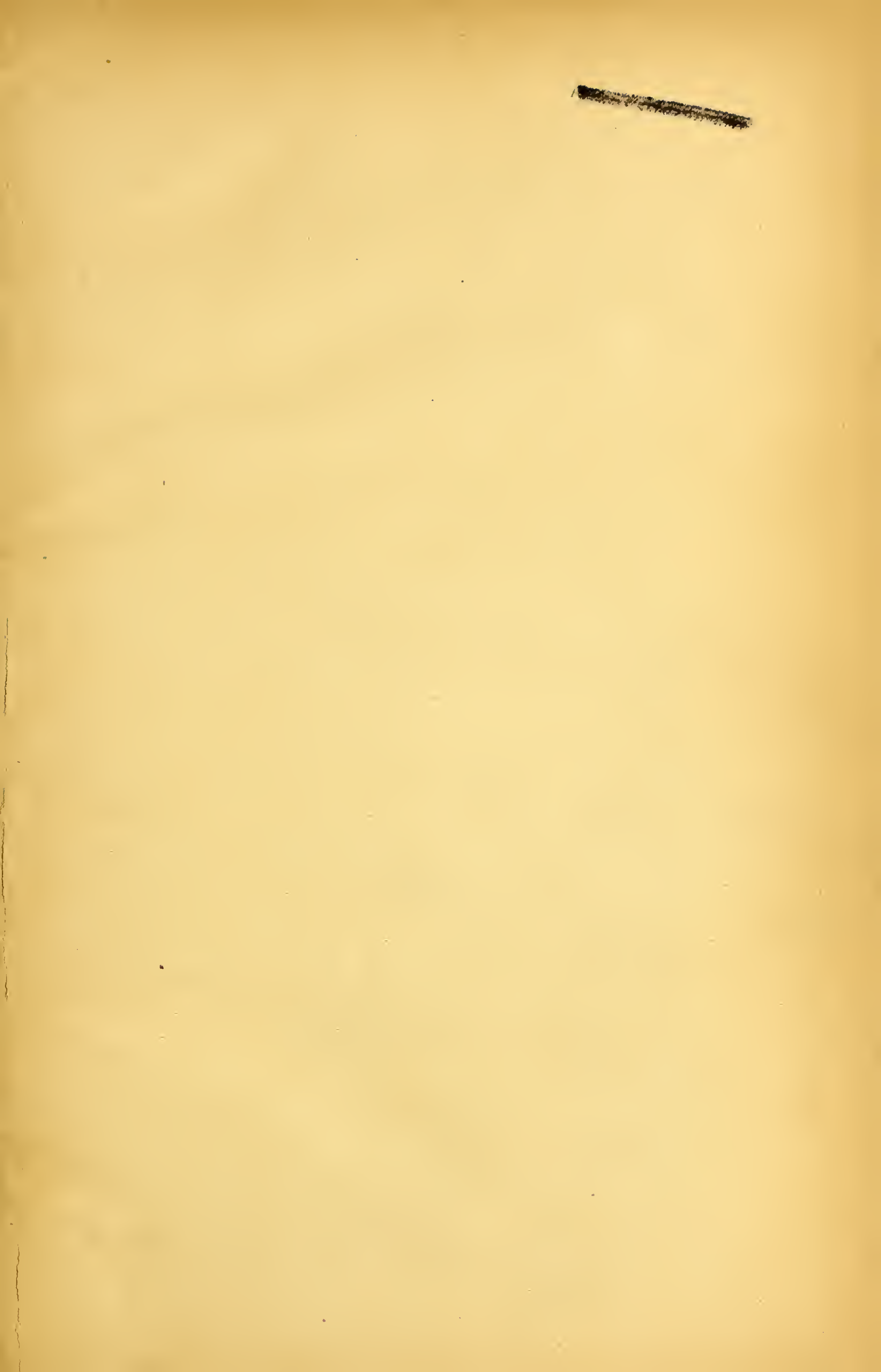



Learning and Labor.
LIBRARY
OF THE
University of Illinois.
CLASS BOOK. VOLUME.
6201 P69t
[redacted]





THÉORIE

DES

POUTRES DROITES

EN

FER ET CIMENT

Digitized by the Internet Archive
in 2015

https://archive.org/details/theoriedespoutre00plan

THÉORIE

DES

POUTRES DROITES

EN

FER ET CIMENT

PAR

P. PLANAT

Directeur de la *CONSTRUCTION MODERNE*



PARIS

LIBRAIRIE DE LA CONSTRUCTION MODERNE

AULANIER ET CIE, ÉDITEURS

13, RUE BONAPARTE, 13

(En face l'École des Beaux-Arts)

Tous droits de traduction et de reproduction réservés

620.1
P69t

THÉORIE DES POUTRES DROITES EN FER ET CIMENT

PRINCIPES GÉNÉRAUX.

Limites de la résistance à l'extension : 1re période. — 2e période. — 3e période. — 4e période.
Pressions et moments de flexion à l'intérieur du ciment non désagrégé.

Nous avons antérieurement publié des recherches sur la théorie de ces poutres, composées de matériaux hétérogènes, ce qui en rend l'étude particulièremeut délicate. Ces recherches avaient principalement pour but de reconnaître quelles interprétations des faits devaient être rejetées, et quelles paraissaient s'accorder avec les faits eux-mêmes.

On ne connaissait, à cette époque, qu'un très petit nombre d'expériences, d'une exactitude insuffisante; et le nombre des constructions exécutées n'était pas très considérable. Depuis, des expériences beaucoup plus complètes, notamment sur la résistance des ciments, mortiers et bétons, sur la loi de leur déformation élastique, ont été exécutées; des constructions beaucoup plus nombreuses permettent de mieux contrôler les indications théoriques.

Nous avons cru nécessaire, et possible aujourd'hui, de reprendre l'étude primitive, restée à l'état d'indication ébauchée, car nous avons maintenant un terrain beaucoup plus solide pour y asseoir une théorie

50340

plus consistante. Les conséquences pratiques que nous tirions des premières recherches ne sont pas beaucoup modifiées par l'étude plus précise que nous avons pu faire depuis; mais elles sont plus fortement justifiées.

Dans les recherches antérieures, nous avions considéré comme négligeable toute résistance à la tension du ciment, parce que, en réalité, cette résistance est faible par rapport à la résistance de compression. Il n'en est pas moins vrai que cette résistance existe. Sous les très fortes charges, lorsque la compression du ciment, ainsi que la tension du métal des barreaux formant armature, sont devenues très considérables, cette résistance à la tension devient tout à fait négligeable; mais sous les charges normales, lorsqu'on se maintient encore au 1/7 ou au 1/10 des conditions qui amèneraient la rupture, l'intervention de la résistance à la tension joue un rôle appréciable; elle modifie, dans une certaine mesure, les résultats obtenus par la première méthode. Or, s'il est très utile d'étudier les conditions dans lesquelles travaille la pièce lorsque la charge atteint son maximum, il n'est pas moins intéressant de comparer les conditions dans lesquelles elle travaille sous la charge considérée comme normale.

LIMITES DE LA RÉSISTANCE A L'EXTENSION.

Soit une poutre droite en ciment, armée de barreaux en fer à la partie supérieure, soumise à des charges verticales et posée sur deux appuis (*fig.* 1). A la partie inférieure sur une longueur plus ou moins grande, et sur une plus ou moins grande hauteur, le ciment a atteint ou dépassé, par suite de la flexion, la limite de sa résistance à la tension; un prisme CDEF reste intact; nous lui supposons une section rectangulaire.

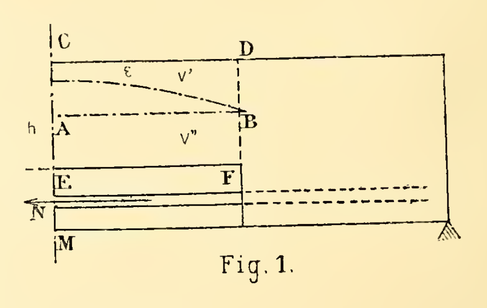


Fig. 1.

Le barreau exerce une tension N. Nous appelons :

μ le moment total des forces extérieures, verticales ou horizontales, par rapport à une section donnée;

ε la distance du plan supérieur CD au point où passe le polygone des résultantes, tracé, comme d'ordinaire, au moyen des forces verticales et horizontales;

v' et v'' les distances, aux plans CD et EF, de l'axe neutre. La section étant considérée comme rectangulaire v' et v'' sont égaux ;

h la hauteur de la section, c'est-à-dire $v' + v''$ ou $2v'$;

s la section ;

b la largeur de cette section.

Si R_1 est le plus grand effort de compression, R_2 le plus grand effort de tension, d'après les formules connues, on aura :

$$R_1 = \frac{\mu v'}{I} + \frac{N}{s} = \frac{2N}{bh^2}(2h - 3\varepsilon),$$

et

$$R_2 = \frac{\mu v''}{I} - \frac{N}{s} = \frac{2N}{bh^2}(h - 3\varepsilon.$$

Proposons-nous de déterminer, pour une section quelconque, la hauteur h pour laquelle la tension atteint la limite de résistance. On trouve que, si R_2 représente cette valeur limite :

$$h = \frac{N}{R_2 b} \times \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{6R_2 b\varepsilon}{N}}\right].$$

Lorsque ε est plus petit que zéro, c'est-à-dire pour la région où le polygone passerait au-dessus de CD, h, ne pouvant être négatif, ne prend qu'une seule valeur ; celle-ci décroît à mesure que ε diminue en valeur absolue, c'est-à-dire à mesure que le polygone s'abaisse.

Lorsque ε est nul, c'est-à-dire sur la section où le polygone coupe CD, h peut avoir deux valeurs : l'une $h = 0$, l'autre $h = \frac{2N}{R_2 b}$.

Lorsque ε devient positif, le polygone passant au-dessous de CD, h peut avoir deux valeurs, l'une et l'autre positives, symétriques par rapport à la valeur moyenne $\frac{N}{R_2 b}$.

Enfin, si ε devenait plus grand que $\frac{N}{6R_2 b}$, la valeur de h serait imaginaire. Quand le polygone s'abaisse au-dessous d'une certaine limite, la limite R_2 de résistance à la tension n'est atteinte nulle part.

Examinons donc les cas où, au milieu de la pièce entre les deux points d'appui, la valeur de ε est successivement négative, nulle, positive, le polygone des résultantes passant au-dessus de CD, puis en C, enfin au-dessous de CD (*fig.* 3). A droite de l'axe, la valeur de ε augmente progressivement pour chaque section, et les valeurs correspondantes de h varient en conséquence. Reliant ces valeurs par une ligne continue, pour représenter les diverses valeurs

de h, nous obtenons une courbe, du genre elliptique ou parabolique, suivant que la charge est uniforme ou est constituée par un poids unique placé au milieu de la portée. Chaque courbe a un sommet E, E', E'' (*fig.* 2) correspondant à la section pour laquelle ε atteint sa limite $\frac{N}{6R_2b}$, et au delà de laquelle les h sont imaginaires.

Pour tout point de la masse de ciment placé au-dessus de la branche supérieure, ou au-dessous de la branche inférieure de la courbe, la tension reste inférieure à la limite R_2.

Pour tout point placé entre les deux branches, la tension est supé-

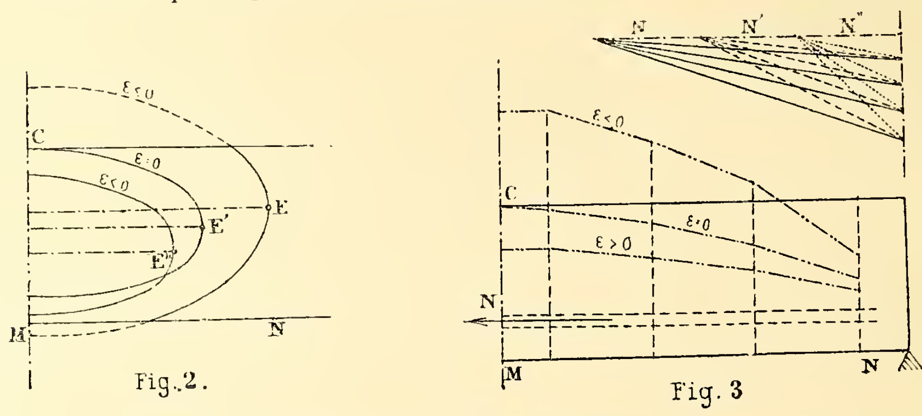


Fig. 2. Fig. 3

rieure à cette limite, et il y a tendance à désagrégation de la matière.

La courbe figurative des h représente donc, pour chaque valeur de la tension N sur le barreau et pour le polygone des résultantes correspondant, la limite de la zone de désagrégation.

Si la section n'était pas rectangulaire comme nous l'avons supposé, les valeurs de I, s, v', v'' auraient des expressions différentes ; les courbes limites ne seraient plus des ellipses ou des paraboles, mais conserveraient une forme générale tout à fait analogue.

D'après cette indication théorique, nous pouvons nous représenter exactement les diverses phases par lesquelles passe une poutre droite, constituée au moyen de ciment et de tendeurs en fer, à mesure que l'on augmente la charge portée par elle.

Première période. — Au début, sous de faibles charges, l'adhérence du fer et du ciment subsistant, la limite de résistance à la tension du ciment n'étant pas atteinte ; le ciment et le fer travaillent

solidairement et prennent partout le même allongement. Il s'ensuit que la tension du métal et celle du ciment sont entre elles dans le rapport de leurs coefficients d'élasticité, rapport que nous appellerons r. Appelant R' la tension, par unité de surface, pour le barreau en fer, on doit avoir $\frac{R'}{R_2} = r$.

Pendant cette période, tout se passe absolument comme si l'on remplaçait la section des barreaux par une section r fois plus grande de ciment, placée à la même hauteur. On calculera donc la déformation de la pièce et les efforts qu'elle subit, par suite de sa flexion, exactement comme pour une poutre ordinaire, en modifiant seulement la section et la valeur de I d'après l'observation qui précède. Une section plane reste plane ; les allongements et raccourcissements, les tensions et compressions en chaque point sont proportionnels aux distances de ce point à l'axe neutre, conformément aux formules habituelles.

Cette période est très courte, et cette proportionnalité ne peut être admise que dans les limites très étroites qui restent généralement au-dessous des conditions de charge pratique.

Ainsi, pour la poutre mise en expérience à Lausanne, rompue sous une charge totale de $27{,}000^k$ environ, ce qui implique une charge normale en service de $3{,}500^k$ à $4{,}000^k$, on a, en prenant $r = 10$, valeur qui convient à cette pièce dont la date de fabrication était déjà ancienne :

$$r\omega = 10 \times 0.001414, \quad s = 0.1536, \quad I = 0.0011, \quad v' = 0^m.0717, \quad v'' = 0^m.2183,$$

en tenant compte de l'intervention du métal à remplacer par une masse équivalente de ciment.

Si la limite R_2 de résistance à la tension est de 20^k par centimètre carré, comme on l'admet généralement, le moment correspondant est égal à 1,080. La portée étant de $5^m.26$, la charge uniforme ne peut dépasser $1{,}640^k$.

Si, pour du ciment âgé, on admet une limite plus élevée, de 30^k, par exemple, la charge maxima serait de $2{,}460^k$. Or le poids seul de la poutre est de $1{,}860^k$. On voit que, aussitôt la pièce posée, la limite de cette première période est déjà presque atteinte, sinon dépassée.

Deuxième période. — On entre donc promptement dans une seconde période très différente de la première : au milieu de la portée, à la partie inférieure de la pièce, la limite de résistance à la

tension a été dépassée et le ciment se désagrège d'une façon imperceptible. Par suite, dans la région médiane, la section de ciment se trouve affaiblie, et cette partie de la pièce fléchit davantage sous la charge. Les bords de la région qui commençait à se désagréger, s'écartent par suite de ce surcroît de flexion et le barreau, qui reste scellé, à droite et à gauche, dans les parties intactes, prend une plus grande tension.

Quand la tension horizontale N augmente ainsi, les charges verticales restant les mêmes, le polygone des résultantes (*fig.* 3) qui, pendant la première période, avait son sommet à l'infini, au-dessus de CD, voit son sommet, d'abord très élevé, s'abaisser à mesure que croît la tension N.

Grâce à ce surcroît de tension, et malgré l'affaiblissement de la section de ciment, l'équilibre se rétablit.

Ensuite, on augmente la charge; il s'ensuit que, inversement alors, le sommet du polygone remonte ; ε négatif prend une plus grande valeur absolue. Tout à l'heure la courbe figurative des h, limite de désagrégation, était une ligne telle que AS, passant près du bord intérieur (*fig.* 4) ; maintenant, le polygone des résultantes ayant remonté, cette limite est une autre courbe telle que A′ S′ passant en dessous de la première.

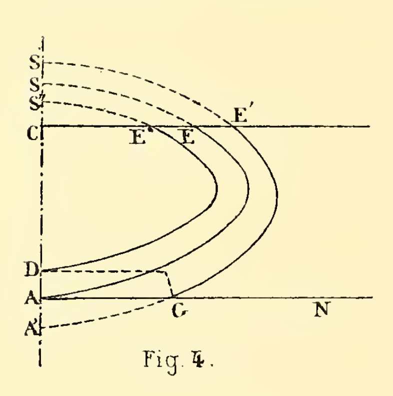


Fig. 4.

Il résulte de là que, de A jusqu'à G, le ciment est exposé à la désagrégation, puisque cette région est comprise entre les deux branches de la courbe, ainsi que nous le remarquions plus haut; cette désagrégation pourrait remonter dans toute la hauteur de la pièce, et sur toute la largeur AG, s'étendre jusqu'à la branche supérieure ou au bord supérieur CE, si elle n'était arrêtée par un nouvel état d'équilibre.

Si le chargement se fait progressivement, la distance A G sera très petite; en effet, la désagrégation venant à se propager, aussitôt la flexion augmente, et la tension du barreau augmente de son côté ; par le même procédé que nous avons déjà décrit, elle rétablit promptement l'équilibre, avant que la désagrégation ait pu se propager d'une manière sensible. Avec de faibles accroissements progressifs, la variation d'équilibre suit pas à pas la variation de charge.

Mais si l'augmentation de charge était forte et se produisait brusquement, l'écart pourrait être plus manifeste, puisqu'il faudrait que d'un seul coup se produisît un grand accroissement de tension, résultant d'une flexion plus sensible et, par conséquent, d'un plus grand affaiblissement de la section de ciment.

Lorsque, finalement, l'équilibre se rétablit, le sommet du polygone qui avait d'abord remonté, par l'augmentation de la charge verticale, est ensuite redescendu par l'augmentation de la tension horizontale. Conjointement se déplace la courbe limite des h. Celle-ci reviendra-t-elle à la position AS primitive ; reste-t-elle au-dessus ; descend-elle au-dessous? De même, que devient le nouveau polygone des résultantes?

Sur la longueur AG, la désagrégation s'est faite, et elle se propage sur une hauteur qui dépend de l'homogénéité du ciment ou béton, de la plus ou moins grande facilité aux fissures. Cette hauteur peut être plus grande au milieu en A, et diminuer à droite et à gauche, vers les bords G; à l'inverse, les fissures peuvent être plus prolongées sur les côtés. On peut admettre, comme moyenne, que la limite réelle de désagrégation est à peu près horizontale.

En tous cas, l'affaiblissement ainsi produit est réglé, dans son ensemble, par cette condition : la flexion de la partie centrale affaiblie doit produire un écartement des bords GG à partir desquels le barreau reste scellé dans le ciment, tel que cet écartement soit égal à l'allongement subi par le barreau en fer, de G en G. On comprend que cette condition règle la tension du métal capable de rétablir l'équilibre.

A mesure que s'est accrue la charge, la désagrégation s'est propagée sur une hauteur un peu plus grande; elle arrive en D par exemple, point où la tension est au maximum R_2. La nouvelle courbe limite des h doit passer précisément au point D; elle ne redescend donc pas jusqu'à la première position; de ce que nous avions remarqué au début (*fig.* 2), il est facile de conclure que la courbe ainsi remontée correspond à un ε plus grand en valeur absolue, et que, par conséquent, le polygone des résultantes est descendu et est plus aplati.

A mesure que la charge s'accroît, la tension du barreau augmente donc, et elle augmente plus vite que ne croît la charge ; telle est la conclusion à tirer de ces observation purement géométriques.

Troisième période. — Il vient un moment où le sommet S de la courbe limite des h atteint le point C. Jusqu'ici il n'y avait, pour

l'épaisseur h du ciment resté intact, qu'une seule valeur utile, l'autre étant négative et n'ayant pas de signification pratique. Cette valeur était fournie par la branche inférieure de la courbe limite des h.

Mais à partir de cette position, deux valeurs positives et utilisables de h se présentent : l'une sur la branche supérieure, l'autre sur la branche inférieure, au moins dans la partie de cette branche qui reste dans les limites du ciment non encore désagrégé.

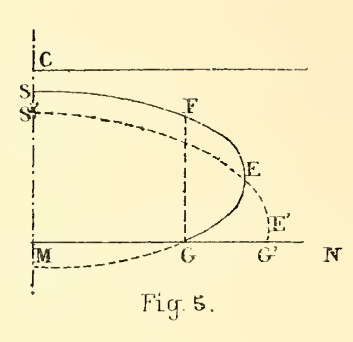


Fig. 5.

Ainsi, sur la figure 5, le sommet S étant descendu au-dessous de C, de S jusqu'à F il n'y a qu'une valeur de h, sur la branche supérieure, puisque la branche inférieure, dans cette région, passe au-dessous de MN, face inférieure de la pièce. Mais sur F E G il y a deux solutions possibles.

Qu'en faut-il conclure? — Que dans toute la région SFGM, la désagrégation s'étend sur la largeur MG et pourrait remonter, sans être arrêtée, jusqu'à la limite SF, si de nouvelles conditions d'équilibre n'intervenaient pas.

En réalité elle s'arrête à une ligne plus ou moins régulière, qu'on peut considérer comme à peu près horizontale, qui se place entre MG et SF, et remonte à mesure que la charge augmente ; en même temps elle s'allonge à droite et à gauche, fort peu d'abord, puis plus rapidement sous les fortes charges.

Dans la région FEG, si l'épaisseur du ciment s'arrêtait dans l'intervalle entre FE et EG, la limite R_2 serait dépassée, et la désagrégation pourrait remonter jusqu'à FE. Mais en réalité, il n'en est point ainsi : jusqu'à ce moment la désagrégation s'étendait sur une largeur plus petite que MG ; le ciment est donc, jusqu'à ce moment, resté intact au-dessous de la branche inférieure GE. Par conséquent la tension y étant inférieure à R_2, le ciment continue à rester intact à partir du plan vertical FG, qui limite la désagrégation.

Quatrième période. — Ensuite, sous une charge plus forte encore, la courbe limite des h devient S'E'G', la désagrégation se propage latéralement, la portion de branche E'G' se réduit de plus en plus ; la limite de désagrégation remontant se rapproche de S'E' qui s'abaisse. La compression R_1 augmente de plus en plus ; la limite constante de résistance R_2 à la tension n'a qu'une valeur de plus en plus faible relativement à celle de la compression.

On se rapproche ainsi, de plus en plus, du cas où l'on négligerait toute résistance à la tension, considérant alors le ciment de plus en plus évidé à la partie inférieure, comme un arc de maçonnerie, à joints de claveaux, bandé par un tirant horizontal.

Il nous reste une dernière remarque à présenter : Si, par suite du déchargement partiel ou total, on revenait en arrière, les poids ou charges repassant par leurs valeurs primitives, on ne repasserait pourtant pas exactement par les phases déjà décrites : le ciment, une fois désagrégé, ne se ressoude pas. Lors donc qu'on diminue les charges, la section affaiblie reste plus mince et plus allongée qu'elle n'était primitivement. L'équilibre se rétablit dans des conditions un peu différentes.

C'est ce qui explique pourquoi, dans les expériences où l'on procédait par chargements et déchargements successifs, on ne retrouvait pas chaque fois les mêmes flèches ni la même tension sur le métal des barreaux.

PRESSIONS ET MOMENTS DE FLEXION A L'INTÉRIEUR DU CIMENT NON DÉSAGRÉGÉ.

Nous venons de voir que, au milieu de la portée, une petite partie du ciment est désagrégée ou fissurée, et que l'étendue de cette portée est d'autant moindre, en largeur et hauteur, que le chargement primitif s'est fait suivant une progression plus régulière. C'est seulement à partir de charges notablement supérieures à la charge normale que cette désagrégation, d'abord localisée en un point pour ainsi dire, commence à s'étendre dans les deux sens. Cette extension s'accroît régulièrement avec la charge.

Dans cette région médiane, et d'abord très peu étendue, les barreaux de fer subissent une tension plus forte qu'ils ne subiraient si le métal et le ciment avaient continué à travailler solidairement ; ces barreaux n'y sont plus noyés dans la masse de ciment, travaillant avec le même allongement ; ils travaillent comme de véritables tendeurs ou tirants reliant les deux moitiés de la poutre, à la partie inférieure légèrement désagrégée.

A droite et à gauche de cette région centrale, le ciment est intact, l'adhérence et la cohésion subsistent ; le fer et le ciment, à partir de là, redeviennent solidaires. Que se passe-t-il dans les deux masses non désagrégées, depuis cette région centrale jusqu'aux appuis ?

Figurons une moitié de la poutre, soit uniformément chargée d'un poids total P pour la demi-portée (*fig.* 1), soit chargée d'un poids unique 2 P au milieu (*fig.* 1'). En NO est la limite à laquelle s'arrête la désagrégation centrale,

A partir de B commence le scellement; le fer et le ciment restent en contact en tous points depuis B jusqu'à l'extrémité D. De A en B, la tension constante (et non plus variable, comme dans la première période de solidarité) est N. Si elle restait aussi constante de B en D, on tracerait comme d'ordinaire le polygone des résultantes MND, qui serait sensiblement une parabole avec la charge uniforme, qui serait une droite avec le poids unique.

En réalité, la tension de B en D ne peut être constante : la ten-

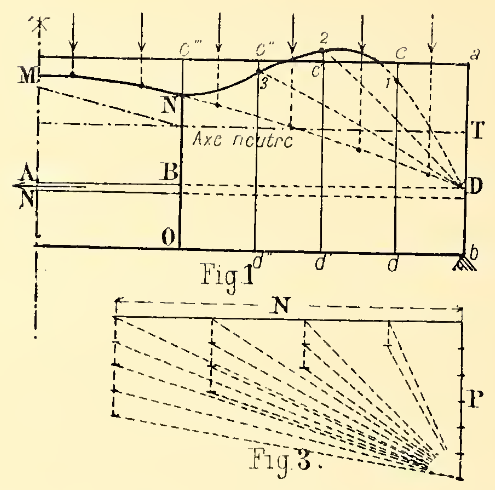


Fig.1
Fig.3.

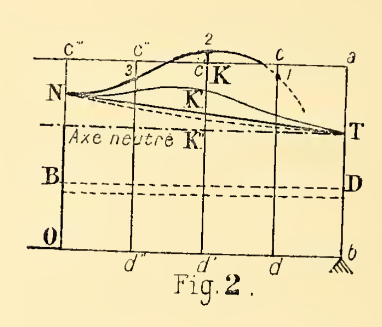


Fig.2.

sion N diminue à mesure qu'elle est transmise à la masse de ciment par le scellement même; d'autre part, la tension du ciment, résultant de la flexion, va, comme on sait, en diminuant du centre vers les appuis. La tension du barreau va donc en décroissant.

Essayons de voir suivant quelle loi approximative. Supposons d'abord que ce soit suivant une progression géométrique : la tension N, dans le plan NO, deviendra 3/4 de N dans le plan $c''d''$, 1/2 de N dans le plan $c'd'$, etc.. et nulle en D.

Dans le cas de charge uniforme, écrivons l'équilibre de *abcd* entre la réaction P, la tension réduite au 1/4 de N, qui agit à partir du plan *cd*, et le premier poids partiel ; ce qui conduit en 1. Puis l'équilibre de $abc'd'$ entre la réaction P, la tension 1/2 de N à partir de $c'd'$ et les deux points partiels successivement rencontrés ; ce qui conduit en 2, etc., et finalement ramène au point N.

Avec le poids unique, sans intervention de poids partiels, les points 1, 2, 3, N sont en ligne droite.

Ces points sont donc ceux où passe la pression résultante sur chaque section verticale *cd*, *c'd'*, *c''d''*....., et ces pressions successives sont déterminées sur les figures 3 et 3'.

A quels moments de flexion correspondent ces pressions obliques ? De M à N le moment, pour l'ensemble des forces extérieures, horizontales et verticales, est mesuré par le produit de la tension constante N multipliée par la distance comptée de MN à l'axe neutre. Mais de N à D il n'en est plus de même, la tension n'étant plus constante; pour évaluer le moment en regard de chaque section verticale,

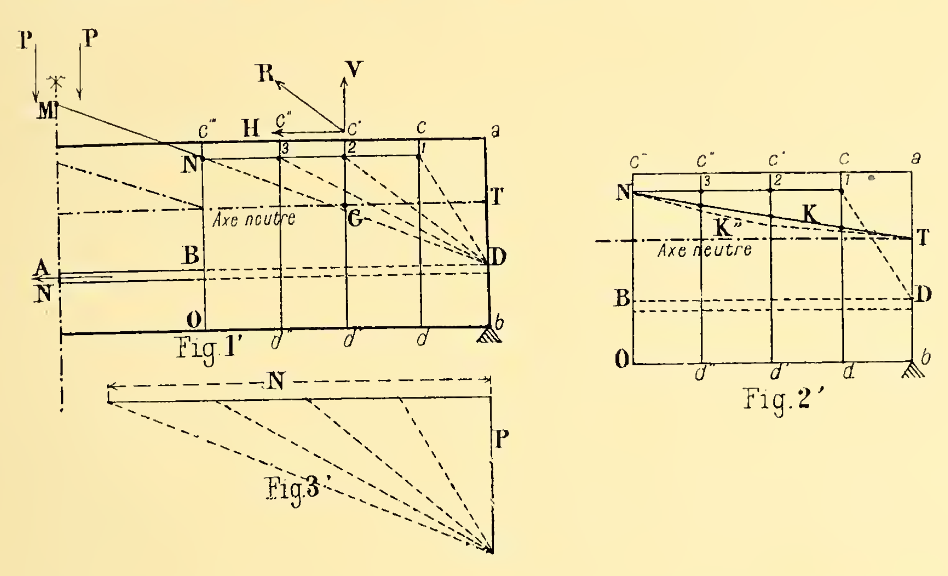


Fig. 1'

Fig. 2'

Fig. 3'

il faut multiplier l'ordonnée comprise entre l'axe neutre et la ligne N, 3, 2, 1, par la tension correspondante : N, $\frac{3N}{4}$, $\frac{2N}{4}$, $\frac{N}{4}$. En effet, soit R la pression oblique en 2, par exemple; évaluons son moment qui est pris par rapport à G sur l'axe neutre (*fig.* 1); il est égal à la somme des moments de ses deux composantes H et V. Or celui de V est nul; le moment cherché se réduit à celui de H, c'est-à-dire à $\frac{N}{2}$ multiplié par l'ordonnée 2 G.

Pour figurer graphiquement ces moments, on peut tout aussi bien considérer N comme restant constant, mais réduire les ordonnées rapportées à l'axe neutre, successivement aux 3/4, à 1/2, 1/4 de leur valeur, et finalement à zéro pour l'extrémité T; ce qui remplace les

lignes N, 3, 2, 1 par NKT. Avec le poids unique, NKT reste une ligne droite; avec la charge uniforme, c'est une courbe qui reste convexe en son milieu.

Tel est le résultat obtenu en partant d'un décroissement de la tension suivant une progression géométrique. Ce résultat est-il admissible?

Voyons quelles en seraient les conséquences. Remarquons d'abord que dans le plan NB, limite de désagrégation, la partie inférieure du ciment, vers O, est la limite de sa résistance R_2 de tension. Si la ligne réduite NKT se relève au-dessus de l'horizontale à partir de N, comme sur la fig. 2, le moment de flexion augmente, car les ordonnées réduites augmentent et il faut les multiplier par un N fictivement constant, pour le calcul des moments. De plus, les pressions réelles N diminuent; la valeur de la tension maxima, qui est $\frac{\mu v}{I} - \frac{N}{s}$, irait donc en augmentant, par cette double cause. Il s'ensuit que, à droite du plan limite NB, la tension maxima dépasserait la limite de rupture ; il y aurait donc désagrégation, ce qui est contraire à l'hypothèse qui nous sert de point de départ: la désagrégation s'arrêtant à NBO.

Il faut donc, au contraire, que la courbe, au lieu de se relever, s'abaisse, soit suivant une droite oblique NKT comme sur la figure 3', soit même en devenant légèrement concave comme NK''T. On pourra admettre, comme moyenne, la droite oblique; c'est-à-dire que les moments de flexion décroissent régulièrement depuis le point N, où le moment est le produit de la tension N du barreau par la distance de ce même point N à l'axe neutre, jusqu'à l'extrémité T où le moment est nul.

Nous sommes ainsi fixés, au moins d'une manière approximative, sur ce qui se passe, à droite et à gauche de la région désagrégée ou fissurée, à l'intérieur de la masse du ciment restée intacte.

CHARGE UNIFORMÉMENT RÉPARTIE.

1° **Branche supérieure** : Hourdis à section rectangulaire. — Flèches. — Section à nervure. — Formules pratiques.
2° **Branche inférieure** : Section rectangulaire ou à nervure. — Flèches. — Formules pratiques. — Réglage des écartements. — Flèches.
Autre méthode. — Exemples d'application. — Proportions des hourdis.

Ces remarques vont nous permettre de déterminer les éléments qui nous sont nécessaires ; soit le travail du fer et celui du ciment dans une pièce dont les dimensions sont données ; soit les dimensions qu'il convient de donner à une pièce pour que le travail soit celui qu'on a fixé à l'avance.

1° BRANCHE SUPÉRIEURE.

Hourdis ou dalles à section rectangulaire.

Nous supposons la charge uniformément répartie ; la section de la pièce est un rectangle. Sous de très fortes charges, avoisinant la rupture, le béton s'est désagrégé sur une longueur $x_1 = \alpha_1 l$, pour la demi-poutre (*fig.* 1).

Nous négligeons la résistance à la tension que peut posséder le béton et qui, sous les fortes charges, est en effet négligeable à côté des résistances à compression du même béton et du fer à la tension.

En conséquence l'épaisseur de ciment à conserver est ici égale à 3ε, si ε est la distance du polygone à la face supérieure dans la section considérée.

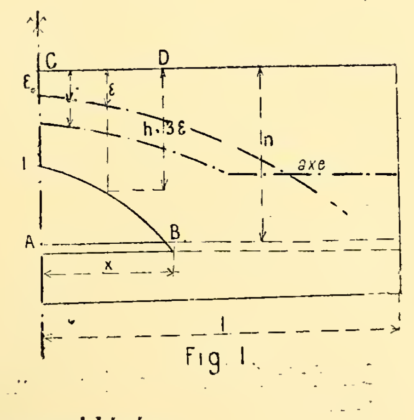


Fig. 1.

On remarquera aussi que, dans ce cas, la valeur de ε doit toujours être positive, le polygone devant se maintenir partout à l'intérieur de la pièce.

Il faut écrire que le déplacement du point B où se fait le scellement du barreau, tel qu'il résulte de la flexion de l'arc CDEB, est égal à l'allongement du barreau AB augmenté du raccourcissement de CDEB. Cette condition exprime qu'à partir de B il y a adhérence du métal et du ciment.

On a donc

$$h = 3\varepsilon, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + (n - \varepsilon_0)\alpha^2, \quad v = \frac{h}{2} = \frac{3\varepsilon}{2}, \quad \mu = \mathrm{N}(v - \varepsilon) = \frac{\mathrm{N}\varepsilon}{2},$$

$$t = n - v = \frac{2n - 3\varepsilon}{2}, \quad \mathrm{I} = \frac{bh^3}{12} = \frac{27b\varepsilon^3}{12}.$$

Le déplacement du point de scellement, résultant de la flexion, est

$$\int_{x=o}^{x=x_1} \frac{\mu t}{\mathrm{EI}} dx = \frac{\mathrm{N}}{9b\mathrm{E}} \int_{\alpha=o}^{\alpha=\alpha_1} \left\{ \frac{2n}{[\varepsilon^0 + (n - \varepsilon_0)\alpha^2]^2} - \frac{3}{\varepsilon_0 + (n - \varepsilon_0)\alpha^2} \right\} l d\alpha.$$

Intégrons en remarquant que ε_0 est plus grand que zéro ; les limites sont $\alpha = o$, et $\alpha = \alpha_1 = \sqrt{\frac{n - 3\,\varepsilon_0}{3\,(n - \varepsilon_0)}}$, ou $3\,\varepsilon = n$.

Finalement ce déplacement est

$$\frac{\mathrm{N}l}{9b\mathrm{E}\varepsilon_0} \times \left\{ \sqrt{\frac{3(n - 3\varepsilon_0)}{n - \varepsilon_0}} + \frac{n - 3\varepsilon_0}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{n - \varepsilon_0}} \times \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{n - 3\varepsilon_0}{3\varepsilon_0}} \right\}.$$

Pour évaluer le raccourcissement dû à la compression, on remarque que la section verticale a pour hauteur moyenne : $\frac{n}{3} + 2\,\varepsilon_0$; le raccourcissement sur la longueur αl devient

$$\frac{3\mathrm{N}l}{\mathrm{E}b(n + 6\varepsilon_0} \times \sqrt{\frac{n - 3\varepsilon_0}{3(n - \varepsilon_0)}}.$$

L'allongement du fer est

$$\frac{\mathrm{N}l}{r\mathrm{E}\omega} \times \sqrt{\frac{n - 3\varepsilon_0}{3(n - \varepsilon_0)}}.$$

On doit égaler cet allongement à la somme des deux termes précédents.

En posant

$$A = \frac{1}{\theta} \times \left\{ 1 + \sqrt{\frac{1-3\theta}{3\theta}} \text{ arc tg } \sqrt{\frac{1-3\theta}{3\theta}} \right\},$$

cette condition devient

$$\frac{bn}{r\omega} = \frac{A}{3} - \frac{3}{1+\theta} \qquad (1)$$

en appelant :

b la largeur de la section,

n la distance du barreau à la face supérieure,

r le rapport des coefficients d'élasticité du fer et du béton ou mortier,

ω la section totale des barreaux,

θ le rapport $\frac{\varepsilon_0}{n}$, dans lequel ε_0 est la distance du sommet du polygone des résultantes à la face supérieure.

L'équation des moments au centre donne

$$N = R'\omega = \frac{pl^2}{2n(1-\theta)} \qquad (2)$$

en appelant

N la tension totale des barreaux, et R′ la tension par unité de surface,

p la charge par mètre courant,

l la demi portée.

Enfin l'équation des projections horizontales donne

$$R_1 = \frac{2R'\omega}{3bn\theta} \qquad (3)$$

si R_1 est la compression du ciment, par unité de surface, au point C.

En raison des relations 2 et 3, on peut remplacer dans la première : $\frac{bn}{r\omega}$ par $\frac{2R'}{3r\theta R_1}$. On fera usage de l'une ou l'autre forme suivant qu'on se donne les dimensions de la pièce, ou le travail des matériaux.

Pour la facilité des calculs, nous donnons ici les valeurs des diverses expressions qui entrent dans le terme A, et celles de $\frac{bn}{r\omega}$ ou de $\frac{2R'}{3rR_1}$ qui s'en déduisent.

TABLEAU N° 1

	$B=\sqrt{\frac{1-3\theta}{3\theta}}$	arc tg B	B arc tg B	A	$\frac{3}{1+6\theta}$	$\frac{bn}{r\omega}$	$\frac{2R'}{3rR_1}$
$\theta=0.005$	8.10	1.448	11.75	2550	2.91	847.1	4.24
$\theta=0.010$	5.68	1.396	7.95	895	2.83	295.5	2.96
$\theta=0.020$	3.96	1.323	5.25	313	2.67	101.6	2.03
$\theta=0.030$	3.18	1.267	4.05	168	2.54	53.4	1.60
$\theta=0.040$	2.77	1.224	3.40	110	2.45	34.1	1.36
$\theta=0.050$	2.34	1.167	2.75	75	2.30	22.7	1.14
$\theta=0.060$	2.13	1.132	2.41	57	2.20	16.8	1.01
$\theta=0.080$	1.80	1.064	1.91	36.4	2.02	10.1	0.81
$\theta=0.100$	1.52	0.989	1.50	25.0	1.88	6.5	0.65
$\theta=0.150$	1.10	0.833	0.92	12.8	1.57	2.70	0.41
$\theta=0.200$	0.82	0.687	0.57	7.85	1.36	1.26	0.25

Flèches.

Pour contrôler les indications de la théorie par les résultats de l'expérience, il est utile de connaître la flèche produite par une charge donnée.

1° Dans la partie centrale où s'est produite quelque désagrégation vers la face inférieure, la flèche est exprimée par

$$\int_{x=o}^{x=x_1} \frac{\mu(b-x)dx}{EI},$$

ou, en conservant toujours les mêmes notations, par

$$F_1 = \frac{2Nl^2}{9Eb}\int_{\alpha=o}^{\alpha=\alpha_1} \frac{(1-\alpha)d\alpha}{\varepsilon_0+(n-\varepsilon_0)\alpha^2]^2},$$

Les limites étant $\alpha =$ et $\alpha_1 = \sqrt{\frac{n-3\varepsilon_0}{3(n-\varepsilon_0)}}$, si l'on remplace $\frac{\varepsilon_0}{n}$ par θ, on trouve finalement

$$F_1 = K \times \frac{P'l^3}{Ebn^3}, \qquad (4)$$

le coefficient K étant l'expression

$$K = \frac{1}{36\theta(1-\theta)^2} \times \left\{3\theta + \sqrt{3(1-\theta)(1-3\theta} + \sqrt{\frac{1-\theta}{\theta}}\,\text{arc tg}\sqrt{\frac{1-3\theta}{3\theta}}\right\}.$$

P' est la charge totale $2pl$ sur la portée $2l$; E est le coefficient d'élasticité du béton ou mortier employé ; l'expression θ est toujours le rapport $\frac{\varepsilon_0}{n}$; sa valeur aura été déduite au préalable du tableau précédent.

Pour faciliter le calcul, le tableau suivant donne les valeurs des éléments qui entrent dans ces dernières formules.

Si

$$B = 3\theta + \sqrt{3(1-\theta)(1-3\theta)},$$
$$C = \sqrt{\frac{1-3\theta}{3\theta}}$$

on a

TABLEAU N° 2

	B	$\sqrt{\frac{1-\theta}{\theta}}$	arc tg C	$\frac{\Sigma}{\theta(1-\theta)^2}$	K
$\theta = 0\ 005$	1.725	14.1	1.448	4460	123.8
$\theta = 0.010$	1.720	9.1	1.396	1475	40.4
$\theta = 0.020$	1.720	7.0	1.323	571	16.8
$\theta = 0.030$	1.71	5.7	1.267	316	8.8
$\theta = 0.040$	1.70	4.9	1.224	208	5.8
$\theta = 0.050$	1.70	4.3	1.167	147	4.1
$\theta = 0.060$	1.70	3.6	1.132	108	3.0
$\theta = 0.080$	1.69	3.4	1.064	78	2.2
$\theta = 0.100$	1.67	3.0	0.989	52	1.4
$\theta = 0.150$	1.63	2.3	0.833	33	0.92
$\theta = 0.200$	1.57	2.0	0.687	23	0.64

2° Dans la partie qui s'étend depuis le point de scellement jusqu'à l'appui l'expression de la flèche est toute différente.

Nous admettons, d'après ce qu'on a déjà vu, que de A en D le polygone des pressions, ramené à une tension N constante, peut être considéré comme étant sensiblement une droite; les moments dans chaque section croissent proportionnellement aux distances par rapport à l'extrémité D. D'où

$$\mu' = \mu'_0 \times \frac{l_1 - z}{l_1} = \mathrm{EI}\frac{d^2y}{dz^2}.$$

$$\mathrm{EI}\frac{dy}{dz} = \frac{\mu'_0}{l_1}\left(l_1 z - \frac{z^2}{2}\right) + \mathrm{N}.$$

La constante N devrait être déterminée par la condition que la courbe AC se raccorde en A avec la courbe centrale. Si, au lieu de faire

ainsi le calcul, nous prenons simplement $N=0$, les angles sont comptés à partir de la tangente commune AB au lieu d'être rapportés à l'horizontale; l'ordonnée sera BB' au lieu de BC qui est la véritable flèche complémentaire F_2; mais la différence est négligeable vu la faible courbure.

Intégrant de nouveau on trouve

$$y = F_2 = \frac{\mu_0 l_1^2}{3EI} = \frac{N(v' - \varepsilon) l^2 (1 - \alpha_1)^2}{3EI},$$

puisque $\mu_0' = N(v' - \varepsilon)$.

La valeur de α_1 est déterminée par la condition : $3\varepsilon_1 = n$; d'où l'on

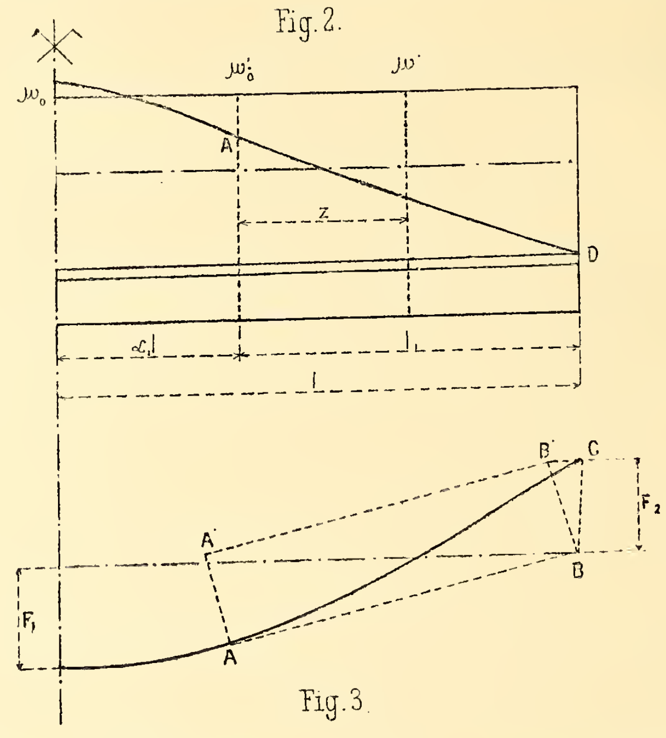


Fig. 3.

conclut : $\alpha_1^2 = \dfrac{n - 3\varepsilon_0}{3(n - \varepsilon_0)}$. La valeur de θ ayant été déterminée au moyen du tableau n° 1, on a $\varepsilon_0 = n\theta$.

Comme $N(n - \varepsilon_0) = \mu_0 = \dfrac{P'l}{4}$, et $\varepsilon = \varepsilon_0 + (n - \varepsilon_0)\alpha^2$, on voit finalement que

$$F_2 = \frac{Pl^3}{12EI}(1 - \alpha_1)^2 \times \left(1 - \alpha_1^2 - \frac{n - v'}{n - \varepsilon_0}\right) \qquad (5)$$

où v' est la demi-hauteur et I le moment d'inertie de la section

totale, non désagrégée, en y remplaçant la section du métal par une surface équivalente de ciment, par conséquent r fois plus grande, placée à la même hauteur.

La somme $F_1 + F_2$ est la flèche totale.

Section à nervure.

Lorsque la section de la pièce est partout rectangulaire, la hauteur conservée jusqu'à la limite de désagrégation est égale à 3ε; lorsque la section est en forme de T, une nervure intervenant, cette hauteur n'est plus connue à l'avance et doit être déterminée par un calcul spécial : il faut exprimer que, à la partie inférieure de la section conservée, la tension est nulle, c'est-à-dire que

$$\frac{\mu v''}{I} = \frac{N}{s} = \frac{N(v'-\varepsilon)v''}{I}.$$

Soit abc la limite inférieure de l'épaisseur conservée; de a jusqu'à b, où cette limite rencontre la face inférieure du hourdis, la section, étant prise dans le hourdis même, est rectangulaire, et la hauteur reste égale à 3ε; mais de b en c la hauteur est différente. Nous rappelons que ε est la distance du polygone des pressions gh à la face supérieure.

Menons un plan vertical MN, la hauteur oc est h; l'horizontale de passant par le centre de gravité de cette section, x est la distance à l'horizontale passant à mi-hauteur du hourdis.

On peut écrire

$$s = ab + cd, \qquad I = \frac{ba^3 + cd^3}{12} + \frac{abcdh^2}{4s}, \qquad x = \frac{cdh}{2s},$$

$$v' = \frac{a}{2} + x, \qquad v'' = h - \frac{a}{2} - x.$$

Si l'on pose

$$h = \beta a \qquad c = \delta b,$$

on a

$$d = (\beta - 1)a, \qquad s = ba[1 + \delta(\beta - 1)], \qquad x = \frac{\delta\beta(\beta - 1)a}{2[1 + \delta(\beta - 1)]},$$

$$I = \frac{ba^3}{12}\left\{1 + \delta(\beta - 1)^3 + 3\beta^2 - \frac{3\beta^2}{1 + \delta(\beta - 1)}\right\}.$$

De la relation de condition posée plus haut, on tire

$$\varepsilon = v' - \frac{I}{sv''}.$$

D'après les valeurs qu'on attribuera aux rapports β et δ on pourra calculer les valeurs de ε. Dressant un tableau des résultats ainsi obtenus, on pourra observer la corrélation qui existe entre les distances ε et les hauteurs *h* caractérisées par les valeurs de β, d'après le rapport adopté entre les largeurs *c* et *b*, c'est-à-dire d'après le rapport δ.

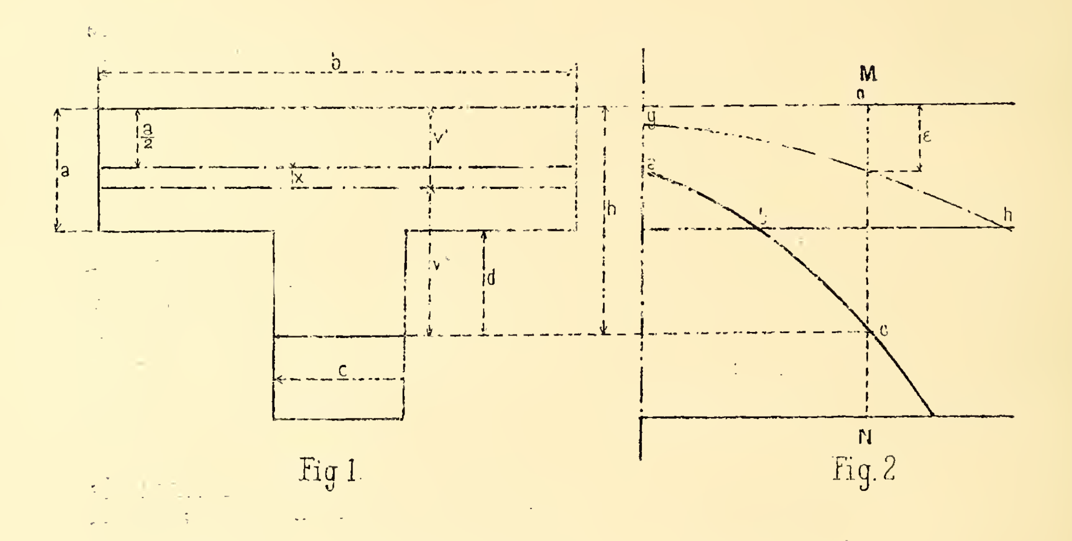


Fig 1. Fig. 2

On obtient ainsi pour les valeurs suivantes de δ :

$\delta = 0.05$

$\beta = 1$	$I = \frac{ba^3}{12} \times 1.00$	$x = 0$	$sv'' = \frac{ba^2}{2} \times 1.00$	$\varepsilon = 0.333a$
$\beta = 2$	$I = \frac{ba^3}{12} \times 1.65$	$x = 0.047a$	$sv'' = \frac{ba^2}{2} \times 3.05$	$\varepsilon = 0.457a$
$\beta = 3$	$I = \frac{ba^3}{12} \times 3.90$	$x = 0.136a$	$sv'' = \frac{ba^2}{2} \times 5.20$	$\varepsilon = 0.511a$
$\beta = 4$	$I = \frac{ba^3}{12} \times 8.60$	$x = 0.261a$	$sv'' = \frac{ba^2}{2} \times 7.45$	$\varepsilon = 0.569a$
$\beta = 5$	$I = \frac{ba^3}{12} \times 16.70$	$x = 0.416a$	$sv'' = \frac{ba^2}{2} \times 9.80$	$\varepsilon = 0.632a$

$\delta = 0.10$

$\beta = 1$	$I = \frac{ba^3}{12} \times 1.00$	$x = 0$	$sv'' = \frac{ba^2}{2} \times 1.00$	$\varepsilon = 0.333a$
$\beta = 2$	$I = \frac{ba^3}{12} \times 2.20$	$x = 0.091a$	$sv'' = \frac{ba^2}{2} \times 3.10$	$\varepsilon = 0.473a$
$\beta = 3$	$I = \frac{ba^3}{12} \times 6.30$	$x = 0.250a$	$sv'' = \frac{ba^2}{2} \times 5.40$	$\varepsilon = 0.556a$
$\beta = 4$	$I = \frac{ba^3}{12} \times 14.80$	$x = 0.461a$	$sv'' = \frac{ba^2}{2} \times 7.90$	$\varepsilon = 0.649a$
$\beta = 5$	$I = \frac{ba^3}{12} \times 28.80$	$x = 0.714a$	$sv'' = \frac{ba^2}{2} \times 10.60$	$\varepsilon = 0.761a$

$\delta = 0.20$

$\beta = 1$	$I = \frac{ba^3}{12} \times 1.00$	$x = 0$	$sv'' = \frac{ba^2}{2} \times 1.00$	$\varepsilon = 0.333a$
$\beta = 2$	$I = \frac{ba^3}{12} \times 3.20$	$x = 0.167a$	$sv'' = \frac{ba^2}{2} \times 3.20$	$\varepsilon = 0.500a$
$\beta = 3$	$I = \frac{ba^3}{12} \times 10.30$	$x = 0.428a$	$sv'' = \frac{ba^2}{2} \times 5.80$	$\varepsilon = 0.633a$
$\beta = 4$	$I = \frac{ba^3}{12} \times 24.40$	$x = 0.750a$	$xv'' = \frac{ba^2}{2} \times 8.80$	$\varepsilon = 0.788a$
$\beta = 5$	$I = \frac{ba^3}{12} \times 47.20$	$x = 1.111a$	$sv'' = \frac{ba^2}{2} \times 12.20$	$\varepsilon = 0.966a$

Dans la pratique, les nervures ne doivent pas être trop minces, par suite de la nécessité de résister aux efforts tranchants et aux efforts de cisaillement; leur largeur ne peut pas non plus être trop grande, sans quoi la saillie ajoutée ne serait plus une véritable nervure, mais une surépaisseur du hourdis. Aussi la valeur de δ est-elle généralement voisine de 0.10; les valeurs 0.05 et 0.20 sont des limites extrêmes.

De même des nervures trop peu saillantes ne joueraient plus un rôle suffisamment efficace; et, avec des nervures trop saillantes, il n'existerait plus une suffisante solidarité entre le hourdis et les barreaux reliés par la nervure. Aussi la valeur de β se tient-elle généralement entre les valeurs 2 et 4.

Si l'on compare donc les valeurs de ε correspondant aux mêmes valeurs de β dans les trois séries, on constate d'abord ce premier fait, c'est que les écarts ne sont pas très considérables. On pourrait donc, à la rigueur établir la relation entre les h et les ε d'après la

série moyenne : $\delta = 0.10$; et, dans tous les cas pratiques, l'erreur commise serait peu appréciable.

En réalité on peut même procéder plus expéditivement, et prendre simplement pour épaisseur utile h, dans la région bc comme dans la région ab, une épaisseur triple de ε.

Voyons, sur un exemple, quelles seraient les conséquences de cette modification.

Le terme important à calculer, c'est celui qui exprime le déplacement du point de scellement, dû à la flexion de la partie centrale; déplacement qu'on obtient en intégrant l'expression

$$\frac{\mu f}{\mathrm{EI}}dx = \frac{\mathrm{N}(v' - \varepsilon)(n - v')}{\mathrm{EI}}dx.$$

Les N étant des constantes, calculons les valeurs des éléments $\frac{(v' - \varepsilon)(n - v')}{\mathrm{I}}$, soit exactement, soit par la méthode approchée que nous venons d'indiquer. Mettons en place les ordonnées ainsi calculées, d'après la valeur des abscisses correspondantes, joignons les extrémités par une courbe continue. Le déplacement cherché est la surface de cette courbe.

Pour la poutre mise en expérience à Lausanne, de portée égale à $2 \times 2^{\mathrm{m}}.63$, la largeur b est de $1^{\mathrm{m}}.50$, c est de $0^{\mathrm{m}}.16$; le rapport δ est $\frac{0.16}{1.50}$, peu différent de 0.10; ce qui permet d'emprunter au tableau ci-dessus les éléments numériques nécessaires.

La valeur de n, distance des barreaux à la face supérieure est de $0^{\mathrm{m}}.24$; on peut prendre $\varepsilon_0 = 0.0113$; le rapport r, comme on le verra plus loin, est de 10 environ. L'épaisseur du hourdis étant de $0^{\mathrm{m}}.08$, la limite du rapport B est $\frac{0.24}{0.08}$ ou 3.

Les abscisses se calculent au moyen de la relation

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + (n - \varepsilon_0)\alpha^2 = 0.0113 + 0.2281\alpha^2;$$

D'où $\alpha^2 = \frac{\varepsilon - 0.0113}{0.2281}$. L'abscisse x est $\alpha l = \alpha \times 2.63$.

Tous calculs faits, soit par la méthode exacte, soit par la méthode approchée, on a

	ε	x	h exact	h approché	$\frac{(v'-\varepsilon)(n-v')}{I}$ exact	$\frac{(v'-\varepsilon)(n-v')}{I}$ approché
$\beta=0.424$	0.0113	0	0.0339	0.0339	256.0	256.0
$\beta=0.562$	0.0150	0.334	0.045	0.045	143.3	143.3
$\beta=0.712$	0.0190	0.484	0.057	0.057	86.8	86.8
$\beta=1.00$	0.0266	0.681	0.080	0.0798	41.8	41.9
$\beta=2.00$	0.0378	0.897	0.160	0.1134	13.0	18.9
$\beta=3.00$	0.0445	1.005	0.240	0.1335	6.9	12.9

Reportant ces abscisses et les ordonnées de la dernière colonne, il est facile de voir que les variations ne portent que sur les ordonnées extrêmes dont la hauteur est faible, et que la différence entre les deux surfaces est négligeable. La partie sur laquelle la flexion est

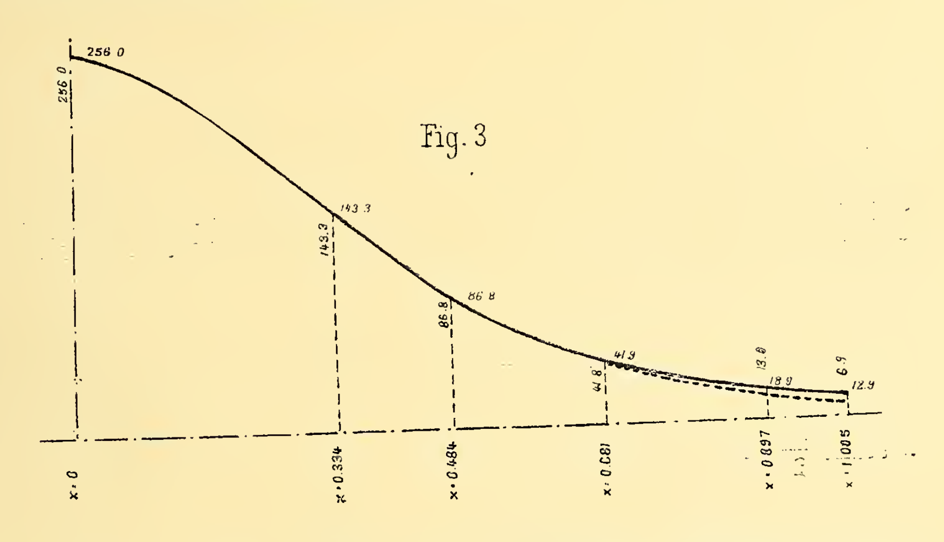


Fig. 3

sensible est la partie centrale; dans cette région l'épaisseur réduite ne dépasse pas l'épaisseur du hourdis; la section réduite reste, par conséquent, une section rectangulaire.

Lorsque l'épaisseur réduite devient plus grande que celle du hourdis, la section devenue plus forte ne fournit plus qu'une faible flexion entraînant un faible déplacement du point de scellement.

Une observation analogue s'applique au déplacement de ce même point par suite de la compression longitudinale. La compression, sensible dans la région médiane, où l'épaisseur est plus petite que celle de hourdis, est faible dans la région plus voisine de l'appui. La

différence résultant du fait que l'on prend pour épaisseur le triple de ε, serait donc également négligeable.

Il suit de là que les formules établies pour le cas d'une section rectangulaire s'appliquent à la section armée de nervures, avec une approximation plus que suffisante.

Formules pratiques.

Lors donc que la pièce est fortement chargée, la résistance à la tension pouvant alors être considérée comme négligeable par rapport aux efforts de compression, nous avons établi que les trois relations principales peuvent s'écrire

$$\frac{bn}{r\omega} = \frac{A}{3} - \frac{3}{1+6\theta}, \quad \text{ou} \quad \frac{2R'}{3rR_1} = \theta\left(\frac{A}{3} - \frac{3}{1+6\theta}\right) \qquad (1)$$

$$(2) \qquad N = R'\omega = \frac{pl^2}{2n(1-\theta)}, \qquad R_1 = \frac{2R'\omega}{3bn\theta} \qquad (3)$$

Le tableau n° 1 donne les valeurs calculées de $\frac{bn}{r\omega}$ ou $\frac{2R'}{3rR_1}$ correspondant aux valeurs de θ. Si l'on se donne r, R' et R_1, on en tirera θ. Celui-ci déterminé, on tire des expressions précédentes les valeurs de n et de ω :

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{b}} \times \sqrt{\frac{2}{3\theta(1-\theta)R_1}} \qquad (\alpha)$$

μ étant $\frac{pl^2}{2}$; et

$$\omega = \frac{1}{R'}\sqrt{b\mu} \times \sqrt{\frac{3\theta R_1}{2(1-\theta)}} \qquad (\beta)$$

Telles sont les deux relations qui, pratiquement, serviront à déterminer : 1° la hauteur n, du barreau à la face supérieure ; on ajoutera quelques centimètres, nécessaires pour envelopper de ciment les barreaux, et l'on aura l'épaisseur du béton ; et 2° la section totale des barreaux pour une largeur b, qui permet de fixer le nombre et le diamètre de ces barreaux.

Pour les bétons de composition normale, âgés d'un mois au moins, la valeur moyenne de r qu'il paraît convenable d'appliquer, est

voisine de 20, comme on le verra d'après les expériences connues. Supposons que l'on adopte pour le métal un travail de 8^k; la rupture se produisant vers 42^k par millimètre, on a adopté ainsi un coefficient de sécurité égal à $\frac{8}{42}$ ou 0.19, soit près de $\frac{1}{5}$. Nous admettrons donc que la charge normale ne doit être que le $\frac{1}{5}$ de celle qui est capable de produire la rupture, correspondant au travail limite R' ou R_1.

Pour la compression R_1 la résistance limite, pour les bétons moyens, est de 200^k environ par centimètre carré au bout d'un mois.

Dans ces conditions, le rapport $\frac{2R'}{3rR_1}$ est $\frac{2 \times 42 \times 10^6}{3 \times 20 \times 200 \times 10^4}$ ou 0.70. D'après le tableau n° 1, la valeur correspondante de θ est de 0.095. Reportant dans les valeurs de n et de ω, on trouve alors :

Coefficient de sécurité : $\frac{1}{5}$.

1° $R' = 42 \times 10^6$, $R_1 = 200 \times 10^4$, $\theta = 0.095$,

$$n = 0.00452 \sqrt{\frac{\mu}{b}},$$

$$\omega = 30.5 \sqrt{b\mu}.$$

Si la résistance à la compression s'élevait à 300^k par centimètre carré, le rapport $\frac{2R'}{3rR_1}$ serait égal à 0.47, et la valeur de θ serait de 0.14 environ. On aurait alors

Coefficient de sécurité : $\frac{1}{5}$.

2° $R' = 42 \times 10^6$, $R_1 = 300 \times 10^4$, $\theta = 0.14$,

$$n = 0.00312 \sqrt{\frac{\mu}{b}},$$

$$\omega = 46.7 \sqrt{b\mu}.$$

Le taux de 8^k est, comme on sait, accepté pour les travaux ordinaires de bâtiment. Pour les constructions plus importantes, exposées à des trépidations, des chocs, on ne dépasse pas le taux de 6^k, correspondant à un coefficient de sécurité de $\frac{1}{7}$. Les valeurs de θ resteront les mêmes, et l'on trouvera dans ce cas :

Coefficient de sécurité : $\frac{1}{7}$.

3° $R' = 42 \times 10^6$, $R_1 = 200 \times 10^4$, $\theta = 0.095$,

$$n = 0.00521 \sqrt{\frac{\mu}{b}},$$

$$\omega = 35.0 \sqrt{b\mu}.$$

et d'autre part

Coefficient de sécurité : $\frac{1}{7}$.

4° $R' = 42 \times 10^6$, $R_1 = 300 \times 10^4$, $\theta = 0.14$,

$$n = 0.00360 \sqrt{\frac{\mu}{b}},$$

$$\omega = 54.0 \sqrt{b\mu}.$$

En général, pour les travaux de bâtiment, c'est la première série qu'il conviendra d'adopter, et la troisième pour les grandes constructions, car on ne peut guère attendre plus d'un mois avant de mettre en charge.

Ces formules sont applicables, théoriquement et pratiquement, aux hourdis, aux poutres à section rectangulaire.

Elles le sont encore, théoriquement, aux poutres armées de nervures, affectant la forme d'un T; mais elles ont l'inconvénient, pour ces dernières, de conduire à des nervures trop peu saillantes; ce qui n'utilise pas suffisamment les avantages de cette forme particulière.

De plus, on se trouverait, avec les poutres à nervure, en présence d'une autre difficulté : l'épaisseur des hourdis ou de la table horizontale du T sera d'abord calculée d'après les précédentes formules, en raison de sa portée, c'est-à-dire de l'écartement des nervures. Ensuite on calculera, d'après la portée des poutres nervées dans le sens perpendiculaire au premier, la hauteur n et la hauteur totale de la poutre, hourdis et nervure compris. Il faut nécessairement que l'épaisseur des hourdis soit plus petite que la seconde, et notablement plus petite si l'on veut que la nervure ait une saillie un peu importante. Ceci exige généralement que l'écartement des nervures, ou portée des hourdis, soit 1/4 à 1/2 de la portée des poutres nervées.

Or, on n'est pas toujours maître de rapprocher autant les nervures. En résumé, c'est donc principalement aux hourdis que doivent s'appliquer les formules précédentes.

2° BRANCHE INFÉRIEURE.

Section rectangulaire ou à nervure.

Dans le calcul qui précède, nous sommes partis des conditions correspondant à la limite de charge maxima, c'est-à-dire à la quatrième période dans laquelle on peut négliger la résistance R_2 du ciment à la tension, pour en déduire les dimensions correspondant à la charge normale, selon que cette dernière doit être le 1/5 ou le 1/10 du maximum de rupture.

Nous allons maintenant procéder en sens inverse, et partir, au contraire, des conditions correspondant aux faibles charges, pendant la deuxième ou la troisième période, et nous faisons cette fois intervenir la résistance R_2 qui ne peut plus être considérée comme négli-

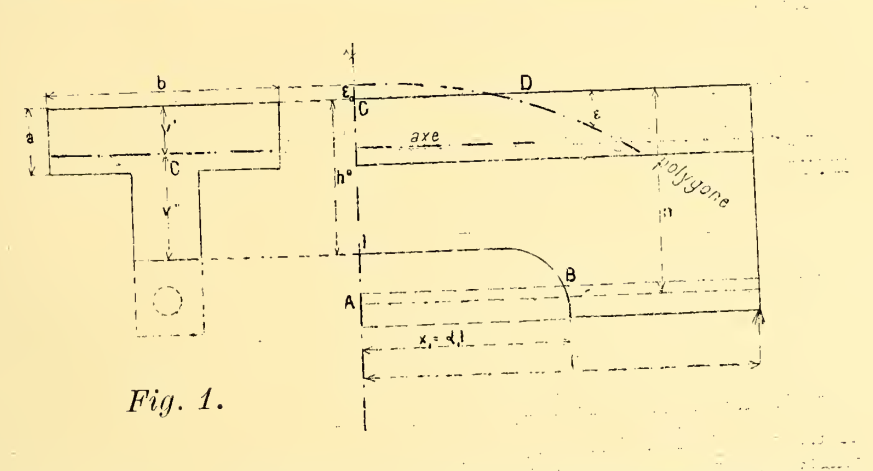


Fig. 1.

geable. Dans ce cas l'épaisseur du ciment sur l'axe est réduite à une hauteur h_0 (*fig.* 1) qu'il s'agit de déterminer.

On a vu que la désagrégation, remontant en hauteur quand la charge augmente, s'arrête lorsque l'équilibre est rétabli par accroissement de tension sur le barreau. A ce moment, la tension, au bas de l'épaisseur conservée h_0, est égale à la valeur limite de la tension R_2 du ciment, à 20^k par exemple par centimètre carré, puisque tel est le chiffre moyen pour le ciment âgé d'un mois. Nous aurons à écrire cette condition, propre à déterminer l'épaisseur h_0.

Pour exprimer le déplacement du point de scellement, tel qu'il

résulte de la déformation causée par la flexion de la partie centrale, nous devons former, comme précédemment, l'expression

$$\int_{x=o}^{x=x_1} \frac{\mu f}{\mathrm{EI}} dx.$$

La valeur de μ est encore

$$\mathrm{N}(v' - \varepsilon) = \mathrm{N}[v' - \varepsilon_0 - (n - \varepsilon_0)\alpha^2] ;$$

ici v' est constant, si nous admettons que la limite de désagrégation est à peu près horizontale, la hauteur h_0 restant constante. Il en est de même de $f = n - v'$.

Cette expression intégrée entre les limites $x = o$ et $x = x_1$, ou $\alpha = 0$ et $\alpha = \alpha_1$ donne

$$\frac{\mathrm{N}l(n - v')}{\mathrm{EI}} \times \left[(v' - \varepsilon_0)\alpha_1 - (n - \varepsilon_0)\frac{\alpha_1^3}{3} \right].$$

La compression, sur la partie centrale de section s, est $\frac{\mathrm{N}\alpha_1 l}{\mathrm{E}s}$.

L'allongement du métal, de section ω, est $\frac{\mathrm{N}\alpha_1 l}{r\mathrm{E}\,\omega}$.

Egalant l'allongement à la somme des deux termes précédents, on trouve

$$v' - \varepsilon_0 - (n - \varepsilon_0)\frac{\alpha_1^3}{3} = \frac{\delta \mathrm{I}}{n - v'}. \qquad (1)$$

Si l'on pose :

$$\frac{s + r\omega}{sr\omega} = \delta.$$

Pour déterminer la longueur x_1 ou $\alpha_1 l$, écrivons qu'à cette distance la désagrégation s'arrête, et que la tension du béton est à sa valeur limite R_2. La tension, à la partie inférieure d'une section quelconque est exprimée par $\frac{\mu v''}{\mathrm{I}} - \frac{\mathrm{N}}{s}$, soit $\frac{\mathrm{N}(v' - \varepsilon)}{\mathrm{I}} - \frac{\mathrm{N}}{s}$, ou

$$\mathrm{N}\left\{ \frac{v'v''}{\mathrm{I}} - \frac{1}{s} - \frac{\varepsilon v''}{\mathrm{I}} \right\}.$$

D'une manière générale posons :

$$\frac{v'v''}{\mathrm{I}} - \frac{1}{s} = \mathrm{A} \quad \text{et} \quad \frac{v''}{\mathrm{I}} = \mathrm{B},$$

et appelons A′ et B′ les valeurs particulières de ces expressions

lorsque la hauteur h de la section est la hauteur n correspondant à l'axe du barreau, on aura pour condition : $R_2 = N(A - B\varepsilon)$.

Puisque $\varepsilon = \varepsilon_0 + (n - \varepsilon_0)\alpha_1^2$, on a finalement

$$R_2 = N[A' - B'\varepsilon_0 - B'(n - \varepsilon_0)\alpha_1^2] \qquad (2)$$

Enfin, au milieu de la portée, on a $\alpha = o$ et $\varepsilon = \varepsilon_0$; pour exprimer que la désagrégation s'arrête et que la tension atteint sa limite R_2 au point E, il suffit d'écrire

$$R_2 = N(A - B\varepsilon_0). \qquad (3)$$

L'équation des moments au centre de la pièce est ici

$$N = \frac{pl^2}{2(n - \varepsilon_0)} = R'\omega. \qquad (4)$$

La compression au sommet C, quand la section est rectangulaire, est

$$R_1 = R_2 + \frac{2N}{s}, \qquad (5)$$

puisque $R_1 = \frac{\mu v'}{I} + \frac{2N}{s}$, v' étant égal à v''.

Si la section n'est pas rectangulaire,

$$R_1 = -R_2 + \frac{Nh(v' - \varepsilon)}{I} = \frac{R^\varepsilon v'}{v''} + \frac{Nh}{sv''}. \qquad (5\ bis)$$

Telles sont les cinq relations exprimant les conditions auxquelles il est nécessaire de satisfaire. On en peut tirer les valeurs de cinq des expressions qui y figurent, expressions que l'on choisira suivant la nature de la question que l'on veut traiter.

Ainsi pour appliquer ces formules à des poutres existantes, de manière à déterminer les conditions du travail qu'elles ont subi dans les expériences auxquelles ont été soumises ces poutres, on dégagera de ces formules les expressions de ε_0, α_1, N ou R', P et R_1.

Pour cela, entre (2) et (3) on élimine N, ce qui donne α_1 en fonction de ε_0 qu'on reporte dans (1). On dégage ε_0 :

$$\varepsilon_0 = \frac{A - A' + 3B'\left(v' - \frac{\delta I}{n - v'}\right)}{2B' + B}.$$

Ensuite on tire α_1 :

$$\alpha_1^2 = \frac{A' - A - (B' - B)\varepsilon_0}{B'(n - \varepsilon_0)}.$$

On remarquera que ces deux expressions sont indépendantes des R et de N.

Substituant dans (3), on aura.

$$N = R'\omega = \frac{R_2}{A - B\varepsilon_0}.$$

Les relations (4) et (5) donneront P et R_1.

Premier exemple d'application. — Prenons la poutre mise en expérience à Lausanne, d'après le procès-verbal reproduit plus loin. Suivons d'abord la marche que suivent les valeurs de α_1 à mesure que les épaisseurs réduites h_0 diminuent de plus en plus sous des charges croissantes; en d'autres termes, voyons comment se propage latéralement la désagrégation centrale.

Nous prendrons ici $r = 10$, valeur qui s'applique, comme nous le vérifierons plus loin, à cette poutre âgée d'ailleurs de plus d'une année, et qui avait pris en conséquence une résistance exceptionnelle. Les formules donnent les résultats suivants :

	s	v'	I	δ	A	B	$v' - \frac{I\delta}{n - v'}$	ε_0	α_1^2	α_1
$h_0 = 0.29$	0.1536	0.0717	0.000730	77.2	14.7	295	−0.2640	−0.2946	+0.1824	0.42
$h_0 = 0.27$	0.1490	0.0670	0.000600	77.4	15.7	325	−0.2014	−0.2190	+0.1177	0.34
$h_0 = 0.24$	0.1474	0.0615	0.000435	77.6	18.5	410	−0.1280	−0.1280	0	0
$h_0 = 0.20$	0.1392	0.0537	0.000253	77.9	23.8	578	−0.0514	−0.0413	−0.0808	»
$h_0 = 0.145$	0.1264	0.0458	0.000121	78.3	31.0	820	−0.0030	+0.0047	−0.1054	»
$h_0 = 0.08$	0.1200	0.0400	0.000064	79.0	16.7	625	+0.0148	+0.0113	+0.0455	0.21
$h_0 = 0.06$	0.0900	0.0300	0.000027	81.8	23.5	1111	+0.0195	+0.0150	+0.0608	0.25
$h_0 = 0.04$	0.0600	0.0200	0.000008	87.4	33.3	2500	+0.0168	+0.0107	+0.0835	0.29
$h_0 = 0.03$	0.0450	0.0150	0.00000337	92.9	44.4	4444	+0.0136	+0.0081	+0.0712	0.27
$h_0 = 0.02$	0.0300	0.0100	0.000001	104.0	66.6	10000	+0.0095	+0.0055	+0.0486	0.22

Que signifient ces valeurs tantôt réelles, tantôt imaginaires?

En suivant pas à pas les phases successives que caractérisent ces valeurs, nous allons retrouver les diverses périodes que nous avons déja décrites.

1° Au début, sous les faibles charges, il y avait adhérence du béton et du métal, jusqu'au moment où la tension, à la partie inférieure, a atteint la limite de résistance R_2 de ce béton.

La hauteur totale de la pièce, égale à $0^m.29$, était utilisée. La

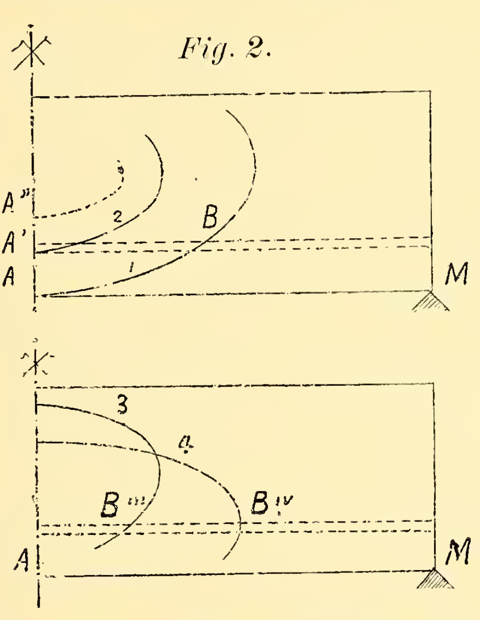
valeur de I pour cette section était 0.000730, la surface est de 0.1536, La surface des barreaux est de 1414 millimètres carrés; la surface équivalente de ciment, ou $r\omega$, est 0.01414. En introduisant cette surface complémentaire, le déplacement du centre de gravité est de $0^m.0139$. La distance de l'axe des barreaux au centre de gravité est de $0^m.1544$.

D'après le principe connu, le moment d'inertie I' de la section ainsi modifiée devient

$$I' = 0.000730 + 0.1536 \times \overline{0.0139}^2 + 0.01414 \times \overline{0.1544}^2 = 0.00110.$$

La nouvelle valeur de v' est $0^m.2044$; en conséquence celle de $\frac{I'}{v''}$ devient 0.00538. La tension est donc $\frac{\mu v''}{I'} = \frac{\mu}{0.00538}$.

Si la limite de cette tension est de 20^k par centimètre carré, comme pour les bétons ordinaires, on en conclut que la valeur limite de μ est 1076. Or, la portée étant de $5^m.26$, la charge correspondant à ce moment est de $1{,}635^k$ seulement, lorsque la poutre seule pèse $1{,}862^k$.



Si la limite est de 30^k, la charge limite est de $2{,}450^k$.

Cette période, si le poids seul de la poutre ne suffit pas pour qu'elle soit dépassée, n'a en tous cas qu'une très courte durée, bien que nous utilisions ici la tension jusqu'à sa limite extrême.

2° Aussitôt après, la section centrale commence à s'affaiblir. La courbe limite, définie comme nous l'indiquions, est une courbe telle que 1, passant d'abord en A et coupant le barreau en B, à une distance : 0.42 l, d'après le tableau ci-dessus. En B comme en A, la tension a sa valeur limite, quelle que soit d'ailleurs celle-ci, puisque les valeurs de α_1 et ε_0 sont indépendantes de R_2, comme on l'a vu.

Au-dessous de la courbe limite il n'y a pas de désagrégation, car la tension y est plus petite que R_2.

Puis, à mesure que la charge augmente, la courbe limite remonte et prend la position 2, avec hauteur de section réduite à 0m.27, puis à 0m.24 et touche alors en A′ l'axe du barreau. La distance horizontale, du centre jusqu'à B, a diminué, passant par la valeur 0.34 l, pour s'annuler dans la position 2.

Au delà, la courbe, continuant à remonter, passe en A″ et ne coupe plus l'axe des barreaux; c'est pourquoi la valeur de α_1 devient imaginaire.

3° Après avoir remonté pendant quelque temps encore, la courbe limite prend une position telle que 3 et coupe de nouveau l'axe des barreaux en B‴; l'épaisseur réduite est alors plus petite que 0m.145. Lorsqu'elle n'est plus que 0m.08, la distance du centre au point d'intersection est 0.21 l. Cette distance augmente ensuite, à mesure qu'augmente la charge et que diminue l'épaisseur utile h_0. Vers une épaisseur réduite de 0m.04, elle atteint son maximum égal à 0.29 l.

4° Enfin, au-delà d'une certaine charge limite, ayant atteint une position telle que 4, l'intersection B rétrograderait vers la gauche, comme l'indiquent les valeurs moindres de α.

Dans la première période il n'y a donc aucune désagrégation. Puis doit s'ouvrir une légère fissure qui remonte peu à peu de la quantité strictement nécessaire pour que la flexion augmente et développe une plus grande tension du barreau sur la courte partie centrale ainsi dégagée.

Bien que les points d'intersection B soient à une distance 0.42 l ou 0.34 l, cela ne veut pas dire ici qu'il y ait désagrégation sur toute cette largeur. Au contraire, la face inférieure AM de la pièce se trouve au-dessous de la courbe limite 1 ou 2; et, d'après les remarques faites au début, cela exprime que la tension y est inférieure à la limite. La désagrégation ne peut s'étendre latéralement, elle reste cantonnée dans la partie centrale; en réalité la largeur de la partie affaiblie est sensiblement nulle, et la véritable valeur de α_1 diffère peu de zéro.

Ensuite, pendant la période où les valeurs théoriques de α_1 deviennent imaginaires, la branche inférieure de la courbe passant au-dessus des barreaux, la véritable valeur de α_1 reste la même, voisine de zéro; car, en réalité, la fissure déjà produite ne se referme pas.

Plus tard, les courbes limites prenant les positions 3, 4, la partie inférieure du béton, voisine de la face inférieure AM, n'est plus au-dessous de la branche inférieure; elle se trouve tomber dans l'intervalle entre les deux branches. Ceci indique, comme nous

l'avons fait remarquer, que dans cette région la tension limite est maintenant dépassée. A partir de ce moment, la désagrégation s'étend de plus en plus vers la droite et vers la gauche, et la valeur théorique de $\alpha_1 l$ indique bien désormais la largeur sur laquelle se propage cette désagrégation.

Dans le cas extrême ou l'épaisseur est réduite au-dessous de $0^m.04$, le point d'intersection B tendrait à revenir en arrière et à se rapprocher du centre. En fait, ce recul ne peut avoir lieu, car le béton déjà désagrégé ne peut se ressouder, et la véritable valeur de α_1 reste égale à son maximum 0.29.

Du reste, à partir de ce moment, les formules du premier cas, établies en négligeant toute résistance à la tension, redeviennent applicables et doivent prendre la place de celles-ci.

D'après ces observations, il est donc nécessaire de remanier le tableau précédent : jusqu'à l'épaisseur $h = 0^m.145$; la valeur de α_1 doit rester sensiblement nulle ; les valeurs primitives de α_1 seront ensuite conservées jusqu'à l'épaisseur de $0^m.04$; au-delà elles seront uniformément de 0.29.

Tant que $\alpha_1 = o$, la valeur de ε_0 se déduit de l'équation (1) qui donne alors

$$\varepsilon_0 = v' - \frac{\delta I}{n - v'};$$

et la condition (2) n'est plus à observer, puisque nous la remplaçons par $\alpha = o$.

Pour les faibles épaisseurs, puisque nous remplaçons la condition (2) par $\alpha_1 = 0.29$, la valeur de ε_0 déduite de (1) sera

$$\varepsilon_0 = \frac{v' - \dfrac{\delta I}{n - v'} - \dfrac{n\alpha_1^3}{3}}{I - \dfrac{\alpha_1^2}{3}},$$

en tenant compte de la valeur de α_1.

Adoptant pour R_2 la valeur de 300×10^4, on trouve finalement :

	α_1	ε_0	N	$P' = 2pl$	R'p. m/m q.		R_1
					théorique	observé	p. cm. q.
$h = 0.29$	0	-0.2640	3230k	2400k	2k.3		13k.1
$h = 0.27$	0	-0.2014	3700k	2400k	2k.6		13k.4
$h = 0.24$	0	-0.1280	4210k	2400k	3k.0	2k.5 à 6k.0	13k.7
$h = 0.20$	0	-0.0514	5500k	2450k	3k.8		15k.8
$h = 0.145$	0	-0.0030	9250k	3500k	6k.5	5k.0 à 7k.5	24k.0
$h = 0.08$	0.21	$+0.0113$	31000k	10900k	21k.9	21k.0	81k.2
$h = 0.06$	0.25	$+0.0150$	44000k	15500k	31k.1	—	116k.7
$h = 0.04$	0.29	$+0.0107$	46200k	16100k	32k.6	—	185k.0
$h = 0.03$	0.29	$+0.0071$	23810k	8440k	16k.8	—	—
$h = 0.02$	0.29	$+0.0028$	7250k	2615k	»	—	—

Au début il semble qu'il y ait une période d'hésitation, en quelque sorte, où la valeur de ε_0 varie rapidement, ainsi que la valeur de N, mais pendant laquelle la valeur de la charge totale P varie peu ; c'est la période où α_1 reste presque nul. Cela veut dire que, pendant ce temps, sous de légers accroissements de la charge, la tension des barreaux augmente rapidement et le polygone des pressions ou résultantes s'abaisse aussi rapidement.

Il semble également que, sous les fortes charges, vers $h = 0.03$, on rencontre un maximum de charge P que l'on ne puisse dépasser, au moins en faisant usage des formules déduites du cas des faibles charges. Il n'est pas impossible que ceci coïncide avec les premiers symptômes de fatigue que l'expérience révèle très nettement sous la charge de 15 à 16,000k effectivement. Quoiqu'il en soit, dans cette période ultime qui va jusqu'à la rupture, on devrait substituer les formules déduites du cas des fortes charges.

Nous avons reproduit, à la suite de ce tableau, les valeurs de la tension R' du métal telles qu'elles ont été mesurées dans les différentes reprises de l'expérience. On doit toutefois faire observer que ces valeurs ne pouvaient être qu'approximatives puisqu'elles ne sont pas mesurées sur la partie centrale mais à une distance assez notable ; et, de plus, parce que, pour loger l'appareil, on avait déchaussé les barreaux, sur une certaine étendue, dans la région précisément où doit se faire le scellement des barreaux. Tout ce que l'on peut dire, c'est que les chiffres observés ne s'écartent guère des chiffres théoriques.

De cette analyse, quelque peu longue et délicate, le fait important à dégager est celui-ci :

La valeur de α reste sensiblement nulle jusqu'à des charges qui

dépassent sensiblement celle que l'on peut considérer comme normale. En effet la pièce, fatiguée vers 16,000^k, s'est rompue à 25 ou 26,000^k, y compris le poids de la poutre. La charge normale serait $\frac{1}{5}$ ou $\frac{1}{7}$ de ce poids, soit 3,000^k à 4,000^k; jusque-là α_1 reste à peu près nul.

On pourra également remarquer que dans le cas actuel, la valeur de ε_0, en changeant de signe, devient nulle sous une charge de 4,000^k environ. Sous la charge considérée comme normale, le polygone des résultantes ou pressions passe donc au sommet de la pièce ou en un point voisin.

Deuxième exemple. — Nous prendrons encore comme exemple une poutre construite à Bruxelles le 7 juillet 1892 et mise en expérience le 15 juillet. La poutre de Lausanne était âgée; celle-ci, au contraire, était de date exceptionnellement récente. Ici la résistance à la tension doit être très faible, le coefficient d'élasticité peu élevé, et le rapport r doit être grand. De plus cette pièce offrait cette particularité que le hourdis n'était composé que de béton sans barreaux de fer; c'est ce qui a amené une rupture prématurée. Le hourdis formant saillie en porte-à-faux s'est rompu sous une charge beaucoup plus faible que celle qui eût pu produire des désordres graves sur la pièce prise dans son ensemble.

A titre de comparaison et pour constater l'influence que peuvent exercer les variations dans la valeur de r, nous adopterons successivement 40 et 60 pour ce rapport.

La marche des calculs est d'ailleurs identique à celle du cas précédent; il est facile également de voir que la marche des faits se présente de la même façon. Avec $r = 40$

	s	v'	I	δ	A	B	$v' - \frac{\delta}{u - v'}$	ε_0	α_1^2	α_1
$h = 0.24$	0.1068	0.0694	0.0004181	42.2	19.1	408.1	−0.0560	−0.0572	0.0130	0.12
$h = 0.21$	0.1025	0.0692	0.0003317	42.7	19.7	424.0	−0.0313	−0.0313	0	0
$h = 0.18$	0.0968	0.0621	0.0002198	43.2	23.6	535.9	−0.0021	+0.0043	< 0	»
$h = 0.16$	0.0922	0.0565	0 0001646	43.7	24 7	627.3	+0.0097	+0.0117	< 0	»
$h = 0.10$	0.0748	0.0400	0.0000507	46.2	33.9	1183.4	+0.0262	+0.0233	0.0517	0.22
$h = 0.06$	0.0600	0.0300	0.0000180	49.5	33.3	1166.7	+0.0251	+0.0180	0.1081	0.33
$h = 0.04$	0.0400	0.0200	0.0000053	57.9	50.5	3773.5	+0.0184	+0.0116	0.1022	0.32
$h = 0.02$	0.0200	0.0100	0.00000067	82.9	100.0	15000.0	+0.0097	+0.0059	0.0543	0.23

La valeur de ε_0 augmente jusqu'à un maximum comme dans le premier cas, ce qui indique l'abaissement progressif du sommet du polygone des pressions; α_1 d'abord positif devient nul et imaginaire, augmente ensuite jusqu'à un maximum au delà duquel il décroît. Nous avons donc à substituer, comme la première fois, une valeur nulle jusqu'à $h = 0.16$; puis une valeur constante, égale à 0.33 à partir de $h = 0.06$.

	α_1	ε_0	N	$P' = 2pl$
$h=0.24$	0	-0.0560	1430k	647k
$h=0.21$	0	-0.0313	1820k	747k
$h=0.18$	0	-0.0021	2490k	900k
$h=0.16$	0	$+0.0097$	3225k	1100k
$h=0.10$	0.22	$+0.0233$	9525k	3070k
$h=0.06$	0.33	$+0.0180$	18180k	6430k
$h=0.04$	0.33	$+0.0116$	925k	3215k
$h=0.02$	0.33	»	»	»

La rupture, accidentelle en quelque sorte, s'est produite sous une charge de 6,500k sur l'aile de 0m.15, ce qui représente pour celle-ci une charge de 210k par mètre courant, et un moment de 210×0.15 ou 32. Le $\frac{I}{n}$ de l'aile est $\frac{1 \times \overline{0.06}^2}{6}$ ou 0.0006; on voit que le travail de tension, à la rupture, atteignait au plus 6k par centimètre carré, chiffre que nous adoptons dans ces calculs.

Nous avons pris 0.15 pour bras de levier, et non $\frac{0.15}{2}$ comme impliquerait la charge uniforme sur le porte-à-faux; c'est que l'aile avait résisté sur toute sa longueur, sauf à un bout et sur un seul côté; il est donc à penser qu'en ce point particulier la charge s'est trouvé accidentellement porter près du bord. Avec $r = 60$

	δ	$v' - \frac{\delta I}{n - v'}$	ε_0	α_1^2	α_1
$h=0.24$	31.5	-0.0242	-0.0249	0.010	0.10
$h=0.21$	31.6	-0.0048	-0.0048	0	0
$h=0.18$	32.3	$+0.0148$	$+0.0160$	<0	»
$h=0.16$	32.8	$+0.0214$	$+0.0219$	<0	»
$h=0.10$	36.1	$+0.0293$	$+0.0248$	0.060	0.25
$h=0.06$	38.5	$+0.0262$	$+0.0187$	0.118	0.34
$h=0.04$	46.9	$+0.0187$	$+0.0117$	0.099	0.31

Ce qui conduit définitivement au tableau suivant :

	α_1	ε_0	N	$P' = 2pl$
$h = 0.24$	0	-0.0242	2070ᵏ	825ᵏ
$h = 0.21$	0	-0.0048	2765ᵏ	1000ᵏ
$h = 0.18$	0	$+0.0141$	3870ᵏ	1300ᵏ
$h = 0.16$	0	$+0.0214$	5310ᵏ	1700ᵏ
$h = 0.10$	0.25	$+0.0248$	13045ᵏ	4110ᵏ
$h = 0.06$	0.34	$+0.0187$	27270ᵏ	8900ᵏ

Au delà le maximum est dépassé. En comparant aux chiffres précédents, on constate que, le rapport r augmentant pour un coefficient d'élasticité moins élevé, la charge correspondant à chaque épaisseur est plus forte, ainsi que la tension. Comme conséquence de ce même fait, les valeurs de ε_0 sont plus grandes dans le second cas, ce qui indique que le polygone s'abaisse. Les valeurs de α_1, c'est-à-dire la largeur de la région désagrégée, varie peu.

Comme pour la pièce précédente ces valeurs restent nulles sous les charges peu considérables et jusqu'aux environs de la charge que l'on peut considérer comme normale. Toutefois, avec des bétons aussi peu résistants, l'élargissement de la fissure centrale commence plus tôt.

Si l'on voulait chercher jusqu'à qu'elle charge s'étend la première période, comportant l'adhérence du béton et du fer, on aurait pour cette pièce

$$s = 0.1068, \quad \omega = 0.000760, \quad r = 60, \quad r\omega = 0.0456, \quad I = 0.0004181,$$
$$I' = 0.0004181 + 0.1068 \times \overline{0.042}^2 + 0.0456 \times \overline{0.0986}^2 = 0.00105,$$

d'où $\frac{I'}{v''} = \frac{0.00105}{0.1286} = 0.00817$. Si $R_2 = 6 \times 10^4$, on trouve que μ ne peut excéder 490, et la charge totale 835ᵏ, chiffre inférieur au poids de la poutre. On devait s'attendre à ce résultat puisque, avec des bétons très âgés et très résistants, on dépassait à peine, pour la charge disponible, le poids même des poutres.

Flèches.

Le calcul des flèches est semblable à celui du premier cas ; toute-

fois nous n'avons pas à exprimer ici en fonction de θ, mais seulement de α_1. L'expression I est ici constante.

1° Pour la partie centrale, ayant à former l'expression

$$\int_{x=o}^{x=x_1} \frac{\mu(l-x)}{\mathrm{EI}}\, dx,$$

Nous remplaçons μ par $\mathrm{N}(v'-\varepsilon)$ et ε par $\varepsilon_0 + (n-\varepsilon_0)\alpha_1^2$; le dx devient toujours $ld\alpha$. Intégrant de $\alpha = o$ à $\alpha = \alpha_1$, on trouve

$$\mathrm{F}_1 = \frac{\mathrm{P}'\alpha_1 l^3}{4\mathrm{EI}} \times \left\{ \frac{v'-\varepsilon_0}{n-\varepsilon_0}\left(1-\frac{\alpha_1}{2}\right) - \alpha_1^2\left(\frac{1}{3}-\frac{\alpha_1}{4}\right)\right\}, \qquad (4')$$

si l'on remplace N par $\dfrac{\mathrm{P}'l}{4(n-\varepsilon_0)}$. Nous rappelons que P′ est la charge totale $2pl$, et l la demi-portée.

2° Pour la partie complémentaire non désagrégée, à partir du scellement jusqu'à l'appui, l'expression de la flèche reste la même que dans le premier cas

$$\mathrm{F}_2 = \frac{\mathrm{P}'l^3}{12\mathrm{EI}}(1-\alpha_1^2) \times \left(1-\alpha_1^2-\frac{n-v'}{n-\varepsilon_0}\right) \qquad (5')$$

Formules pratiques.

D'après les remarques qui précèdent, nous admettrons que pour les charges normales la valeur de α_1 doit rester nulle ou très faible ; ce qui permet de simplifier d'abord les 5 relations que nous avons établies au début ; la seconde disparait et est remplacée par $\alpha_1 = o$.

De plus, nous nous imposerons cette condition que ε_0 soit nul, c'est-à-dire que le polygone des résultantes passe précisément au sommet de la pièce, et nous réglerons en conséquence, soit les dimensions de la pièce et des barreaux, soit la charge correspondant à ce cas particulier. Cette condition auxiliaire a pour avantage de simplifier beaucoup les calculs qui sans cela sont très compliqués, pour ne pas dire inabordables, en raison de la forme très compliquée des expressions v', v'', I, s. Enfin nous admettons que les dimensions sont réglées de manière que la hauteur h_0 de la section réduite est égale à l'épaisseur même des hourdis. De cette manière la section

réduite est toujours rectangulaire, quelle que soit d'ailleurs la forme de la pièce, rectangulaire ou à nervure.

Nous posons donc

$$\varepsilon_0 = 0, \qquad \alpha_1 = 0, \qquad v' = v'' = \frac{h_0}{2}, \qquad \mathrm{I} = \frac{bh_0^3}{12}, \qquad s = bh_0,$$

et les équations restantes deviennent :

$$3(2n - h) = \partial bh_0^2 \qquad (1)$$

$$\mathrm{R}_2 = \frac{2\mathrm{N}}{s} \qquad (2)$$

$$\mathrm{N} = \mathrm{R}'\omega = \frac{\mu}{n} = \frac{pl^2}{2n} \qquad (3)$$

$$\mathrm{R}_1 = 2\mathrm{R}_3 \qquad (4)$$

P étant toujours $\frac{s + r\omega}{sr\omega}$. Ces quatre relations permettent de déterminer h_0 ou $\frac{s}{l}$, n, ω, R_1 au moyen des r, b, p, R', R_2. On trouve ainsi

$$h_0 = \sqrt{\frac{\mu}{b}} \times \sqrt{\frac{6r}{2r\mathrm{R}_2 + \mathrm{R}'}}, \qquad n = \frac{1}{\mathrm{R}_2}\sqrt{\frac{\mu}{b}} \times \sqrt{\frac{2(2r\mathrm{R}_2 + \mathrm{R}')}{3r}}$$

$$\omega = \frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{R}'}\sqrt{b\mu} \times \sqrt{\frac{3r}{2(2r\mathrm{R}_2 + \mathrm{R}')}}$$

la comparaison R_1 au sommet étant toujours égale à $2\mathrm{R}_2$.

Appliquons ces formules, comme nous l'avons fait pour le premier cas, à des bétons pour lesquels le rapport r ait la valeur moyenne de 20, en adoptant les coefficients de sécurité : $\frac{1}{7}$ et $\frac{1}{5}$.

Mais avant de faire usage de ces formules, il est nécessaire d'en bien préciser la signification.

Nous nous sommes imposé la condition préalable que la pression dans la région centrale passe exactement au sommet de la pièce; ceci implique que la compression maxima R_1 sera toujours double de la résistance limite R_2 à la tension. En général, cette valeur $2\ \mathrm{R}_2$ ne sera pas égale à la limite de compression que l'on veut admettre avec sécurité.

En d'autres termes, la compression maxima $2\mathrm{R}_2$, étant plus faible ou plus forte que la limite acceptable, correspond à une charge plus faible ou plus forte que la charge normale pour laquelle on veut atteindre cette limite. Il est donc nécessaire de déterminer, au préa-

lable, la valeur que l'on doit attribuer à la charge ou au moment μ, valeur qui ne correspond pas à la charge normale. Si, par exemple, $2\,R_2$ était moitié seulement de la compression limite que l'on ne veut pas dépasser, il faudait remplacer μ par $\frac{\mu}{2}$; en même temps on remplacerait R' par $\frac{R'}{2}$ pour que le travail du métal soit aussi la moitié du travail normal. Ceci suppose que, entre les limites de la demi-charge normale à la charge normale elle-même, le travail du béton et celui du fer croîssent à peu près proportionnellement.

Veut-on, par exemple, que le travail maximum de compression, sous la charge normale, se tienne au $\frac{1}{7}$ de la rupture? On cemmencera par remarquer que la résistance à la compression est, en général, pour les mortiers et bétons, égale à 10 fois la résistance de tension, soit à $10\,R_2$. Le travail maximum de compression sera donc $\frac{10\,R_2}{7}$.

D'autre part, dans nos formules, la compression maxima est nécessairement égale à $2\,R_2$; ces formules s'appliquent donc à une charge et un moment qui sont à la vraie charge normale dans le rapport de 2 à $\frac{10}{7}$, soit 1.4. Il faudra remplacer μ et R' par $1.4\,\mu$ et $1.4\,R'$.

Veut-on prendre pour la compression un coefficient de sécurité égal à $\frac{1}{5}$ seulement? La compression maxima sera $\frac{10\,R_2}{5}$ ou $2\,R_2$. Dans ce cas particulier, elle est précisément égale à celle que supposent les formules, et celles-ci ne demandent aucune modification.

On trouve ainsi :

Coefficient de sécurité : $\frac{1}{5}$.

$$R' = 42 \times 10^6, \qquad R_1 = 200 \times 10^4, \qquad \text{rapport} = 1.00$$

$$h_0 = 0.00274\sqrt{\frac{\mu}{b}}, \qquad n = 0.00364\sqrt{\frac{\mu}{b}},$$

$$\omega = 34.2\sqrt{b\mu}.$$

avec des bétons très résistants

$$R' = 42 \times 10^6, \qquad R_1 = 300 \times 10^4, \qquad \text{rapport} = 1.00$$

$$h_0 = 0.00245\sqrt{\frac{\mu}{b}}, \qquad n = 0.00270\sqrt{\frac{\mu}{b}},$$

$$\omega = 46.1\sqrt{b\mu}.$$

Si l'on compare les résultats obtenus, dans les mêmes conditions, avec les premières formules, on voit que les valeurs de n sont ici un peu plus faibles, et les valeurs de ω un peu plus élevées, ou égales.

De même.

Coefficient de sécurité : $\frac{1}{7}$.

$$R' = 42 \times 10^6, \qquad R_1 = 200 \times 10^4, \qquad \text{rapport} = 1.4,$$

$$h_0 = 0.00320\sqrt{\frac{\mu}{b}}, \qquad n = 0.00438\sqrt{\frac{\mu}{b}},$$

$$\omega = 37.9\sqrt{b\mu}.$$

et avec les bétons très résistants

$$R' = 42 \times 10^6, \qquad R_1 = 300 \times 10^4, \qquad \text{rapport} = 1.4,$$

$$h_0 = 0.00287\sqrt{\frac{\mu}{b}}, \qquad n = 0.00325\sqrt{\frac{\mu}{b}},$$

$$\omega = 51.4\sqrt{b\mu}.$$

En comparant, nous voyons que la valeur de n est ici un peu plus faible; celle de ω est tantôt un peu plus élevée, tantôt un peu plus faible.

Ce résultat ne doit pas surprendre : en faisant maintenant intervenir la résistance de tension du béton que nous avions négligée d'abord, il est naturel que l'épaisseur nécessaire pour ce béton soit un peu diminuée. Toutefois la différence n'est pas très considérable, et il semble permis de dire que, en raison de cette observation, les deux séries de formules se contrôlent l'une par l'autre.

Réglage des écartements. — Nous devons faire observer que l'écartement des nervures, ici également, n'est pas indépendant de leur portée. En effet, appelons p la charge par mètre carré. Sur une travée à nervure, la charge est $2pbl$, et le moment $\frac{pbl^2}{2}$. Sur le hourdis, par mètre courant, la charge est pb, le moment $\frac{pb^2}{8}$.

On a vu que les h_0 sont de la forme $A\sqrt{\frac{\mu}{b}}$, A étant le coefficient calculé d'après les formules qui précèdent; et les n de la même forme $B\sqrt{\frac{\mu}{b}}$. Sur le hourdis le n' sera $B'b\sqrt{\frac{p}{8}}$, d'après la valeur

du moment indiqué ci-dessus; l'épaisseur totale, un peu plus grande que n', sera par exemple $\frac{5n'}{4}$.

Sur la poutre comprenant toute une travée, l'épaisseur réduite h_0 sera $A\sqrt{\frac{pl^2}{2}}$. Il faut que l'expression $\frac{5n'}{4}$ soit au moins égale à h_0, sans quoi la poutre n'aurait pas la résistance que nous lui attribuons. Écrivant cette relation on en conclut :

$$\frac{5B'}{8A}=\frac{l}{b}, \quad \text{ou} \quad \frac{2l}{b}=\frac{10B'}{8A}.$$

Nous n'avons qu'à introduire les valeurs de A et B' que nous avions calculées. Pour le cas moyen de $r=20$, $R_2=20^k$ par centimètre carré, $R'=8^k$ par millimètre, A est 0,00316 et $B'=0,00632$, lorsque l'on prend $\frac{1}{7}$ à $\frac{1}{10}$ pour coefficient de sécurité. Le rapport $\frac{2l}{b}$, entre la portée du plancher et la largeur de travée, est 2.50.

Si l'on prend $\frac{1}{5}$, ce rapport se réduit à 1.80.

On peut se demander quelles seraient les conséquences si l'on n'adoptait pas ces proportions qui sont les plus rationnelles.

Au cas où l'on écarterait davantage les nervures, la portée du hourdis serait plus grande, et le calcul donnerait nécessairement une plus grande épaisseur pour ce hourdis; elle augmenterait proportionnellement à l'écartement, d'après l'expresion $n=B'b\sqrt{\frac{p}{8}}$.

L'épaisseur h_0, nécessaire à la poutre nervée, ne changerait pas, puisqu'elle est représentée par $A\sqrt{\frac{pl^2}{2}}$, où ne figure pas b. Il n'y aurait pas d'inconvénient, sauf que toute la matière du hourdis ne serait pas utilisée pour la flexion dans le sens longitudinal, puisque h_0 serait plus petit que l'épaisseur $\frac{5n'}{4}$. La valeur de n pour la poutre, et son épaisseur totale, ne changeraient pas, non plus que la section des fers.

Au cas où l'on rapprocherait, au contraire, les nervures, l'épaisseur de hourdis, calculée d'après la flexion transversale, serait moindre, tandis que le h_0 nécessaire à la poutre ne changerait pas. Le hourdis serait donc insuffisant, et la poutre n'aurait pas la résis-

lance que nous lui attribuons; ce qui serait un inconvénient beaucoup plus grave que dans le cas précédent. Pour y remédier, il faudrait calculer la poutre, non pas sur l'écartement réel b, mais sur l'écartement normal, égal à $1.80\,l$ ou à $2.50\,l$. La résistance de la matière ne serait pas alors complètement utilisée, mais la sécurité subsisterait tout entière.

En général, on aura plutôt à augmenter les écartements qu'à les diminuer, car un écartement égal à $1.8\,l$ ou même à $2.50\,l$ n'est généralement pas suffisant.

Les formules qui précèdent déterminent bien l'épaisseur convenable pour le hourdis; mais, pour le calcul des poutres : hauteur des nervures déduite de n, et section ω des fers, elles prêtent souvent à une objection : c'est qu'elles donnent à la nervure et à la poutre une faible hauteur et, par conséquent, une forte section aux fers. Or ce n'est pas là un emploi avantageux du système, dans lequel on doit, pour être logique, plutôt chercher à réduire la quantité de métal et à la remplacer par du ciment.

Aussi allons-nous indiquer plus loin une autre méthode permettant de donner plus de hauteur à la poutre et d'alléger le métal.

Flèches. — Puisque α_1 et ε_0 sont supposés nuls, la flèche F_1 de la partie centrale est sensiblement nulle.

Celle de la partie complémentaire devient

$$F_2 = \frac{P'l^3}{12EI} \times \left(1 - \frac{n - v'}{n}\right).$$

Ici les v' et I s'appliquent à la section totale de la pièce et peuvent être calculés directement d'après les dimensions de celles-ci.

AUTRE MÉTHODE.

Les formules qui précèdent, toujours applicables aux hourdis et aux pièces à section rectangulaire, ne s'adapteront pas dans tous les cas, aux poutres à nervures. Nous allons donc indiquer une autre méthode de calcul dont on fera usage pour celles-ci.

Fréquemment l'écartement des baies, des points d'appui, impose

au constructeur l'écartement des nervures qu'il n'est plus maître de régler; de même la hauteur de la nervure ne peut toujours être fixée à volonté, on est parfois commandé par les épaisseurs disponibles pour les planchers; la largeur de la nervure se règle principalement d'après le nombre et le diamètre des barreaux qu'il faut noyer dans une masse suffisante de béton.

Ayant donc calculé l'épaisseur du hourdis, le nombre et le diamètre de ses barreaux d'après la portée de ce hourdis, c'est-à-dire d'après l'écartement imposé des nervures, nous admettons que le constructeur s'est également fixé les dimensions de la nervure, sauf à régler ultérieurement le diamètre des barreaux en fer. Au lieu de déduire du calcul, comme précédemment, la section de la travée, nous supposons donc qu'elle est déterminée à l'avance; il s'agit maintenant d'en conclure la section des barreaux et de vérifier si la poutre, ainsi constituée, est bien capable de porter la charge prévue et de fournir le moment correspondant.

Nous ne sommes plus maîtres de régler les dimensions de manière à satisfaire à ces deux conditions préalables que nous nous étions imposées : rendre ε_0 nul, et faire que l'épaisseur réduite h_0 soit au plus égale à l'épaisseur du hourdis rectangulaire. Toutefois nous pouvons admettre que α_1 soit nul ou très faible, ce qui supprime la seconde condition.

Les relations à satisfaire sont alors

$$v' - \varepsilon_0 = \frac{\delta I}{n - v'} \qquad (1)$$

$$R_2 = N(A - B\varepsilon_0) \qquad (2)$$

$$R'\omega = N = \frac{\mu}{n - \varepsilon_0} \qquad (3)$$

$$R_1 = -R_2 + \frac{R'\omega h_0(v' - \varepsilon_0)}{I} \qquad (4)$$

De ces quatre équations nous avons maintenant à tirer : h_0, ε_0, ω et μ. La valeur de h_0 ayant été déterminée la première, nous connaîtrons la hauteur de la section réduite qui n'est plus ici nécessairement un rectangle, mais qui sera en forme de T généralement; on en déduira les valeurs correspondantes de v', v'', I, s, à introduire dans les autres expressions. On se donne la largeur b et l'épaisseur du hourdis, la largeur de la nervure, la hauteur de celle-ci et la distance n des barreaux à la face supérieure; les valeurs de $R_1 R_2 R'$.

Résolvant sous cette nouvelle forme, on trouve :

$$\frac{h_0}{n} = \frac{R_1 + R_2}{KR_2 + R_1}, \qquad (\alpha)$$

en posant : $K = \frac{R'}{rR_2}$ pour simplifier les écritures.

La valeur de h_0 étant ainsi déterminée, on connaît toutes les dimensions de la section réduite par la désagrégation, cette section comprenant cette fois, non seulement le hourdis, mais au besoin une partie de la nervure. D'après la forme de la section, on en déduit, comme nous l'indiquions, les valeurs de v', v'', I, s, correspondant à la section réduite.

La valeur de ε_0 qui détermine le point où se place le polygone des résultantes est exprimée par

$$\varepsilon_0 = v' - \frac{1}{s} \times \frac{(R_1+R_2)I}{R_1 v'' - R_2 v'}. \qquad (\beta)$$

Celle de ω, section totale des barreaux, par

$$\omega = s \times \frac{R_1 v'' - R_2 v'}{KrR_2 h_0}, \qquad (\gamma)$$

et celle de μ par

$$\mu = \frac{(R_1 + R_2)^2 I + s(R_1 v'' - R_2 v') \times [KR_2 h_0 + (R_1 v'' - R_2 v')]}{(R_1 + R_2) h_0};$$

ou

$$\mu = \frac{(R_1 + R_2)I + s(n - v')(R_1 v'' - R_2 v')}{h_0}, \qquad (\delta)$$

le h_0 étant toujours égal à $v' + v''$.

Appliquons ces formules à quelques valeurs particulières des données.

1° Supposons que la tension limite R_2 soit de 20^k par c. m. q., et que le rapport r soit égal à 20 ; valeurs moyennes qui paraissent s'adapter aux cas ordinaires de la pratique. La limite R_1 est généralement égale à 10 fois celle de R_2; prenons le $\frac{1}{10}$ comme travail de sécurité. La valeur de R_1 sera alors égale à celle de R_2.

Le travail R' du fer est KrR_2; si nous le fixons à 8^k par mm. q., il est facile de voir que $K=2$.

$R_1 = 20^k$ par cm. q., $R_2 = 20^k$ par cm. q., $R' = 8^k$ par mm. q., $K = 2$.

Reportant dans les expressions ci-dessus, on trouve

$$\frac{h_0}{n} = \frac{2}{3}, \qquad \varepsilon_0 = v' - \frac{2I}{s(v'' - v')}, \qquad \omega = s \times \frac{v'' - v'}{2rh_0}$$
$$\mu = R_2 \times \frac{4I + s(v'' - v)(v' + 3v'')}{2h_0}.$$

On en concluera la charge normale que la poutre peut porter dans les conditions de travail indiquées.

2° Supposons que l'on ait à calculer, non plus d'après la charge normale, mais d'après une surcharge d'épreuve plus élevée que celle-ci et comportant un travail des matériaux plus élevé également.

La limite de tension R_2 étant toujours 20^k, la pièce doit être essayée, à titre d'épreuve, sous une charge double, par exemple, de la charge normale; on veut que, dans ces conditions, le travail R_1 n'excède pas le double de R_2, c'est-à-dire 2 fois la valeur adoptée dans le cas précédent; et que le travail R' du fer n'excède pas le double de 8^k, ou 16^k par millimètre carré; d'où l'on conclut $K = 4$, si r reste égal à 20 :

$R_1 = 40^k$ par cm. q., $R_2 = 20^k$ par cm. q., $R' = 16^k$ par mm. q., $K = 4$.

On trouve alors :

$$\frac{h_0}{n} = \frac{3}{5}, \qquad \varepsilon_0 = v' - \frac{3I}{s(2v'' - v')}, \qquad \omega = s \times \frac{2v'' - v'}{4rh_0},$$
$$\mu = R_2 \times \frac{9I + s(2v'' - v')(5v'' + 3v')}{3h_0}$$

Exemples d'application.

Appliquons cette dernière méthode à quelques exemples exécutés par M. Hennebique, dont les constructions, généralement bien proportionnées, ont déjà subi l'épreuve du temps.

1° *Atelier de tissage à Armentières.* — Les planchers de cette usine sont composés d'un hourdis de $0^m.10$; la largeur de travée est

de 2 mètres; la hauteur n est de $0^{m}.23$; la largeur de nervure est de $0^{m}.13$.

La surcharge libre est fixée à 400^{k}; le moment maximum est égal à 3430, y compris le poids mort, la portée étant de $4^{m}.50$.

Des dimensions indiquées on conclut :

$$h_0 = 0^{m}.153, \quad s = 0.2070, \quad I = 0.000208, \quad v' = 0.0525, \quad v'' = 0.1005.$$

Les formules, pour le cas normal, en maintenant le travail aux chiffres indiqués, donnent :

$$\varepsilon_0 = 0^{m}.125, \quad \omega = 0.001634, \quad \mu = 2.815.$$

La valeur de μ montre que, si l'on calcule le moment sur la charge totale, y compris le poids de la construction, le travail des matériaux est légèrement supérieur à celui que nous admettons, puisque le moment théorique est de 2815 au lieu de 3430.

L'armature de la nervure comprend deux barreaux; d'après la section totale ω, le diamètre de chacun d'eux doit être de 32 à 33 millimètres. Les indications graphiques qui nous sont fournies semblent comporter un diamètre de 32 à 35, qui serait donc conforme aux résultats théoriques.

2° *Pensionnat à Ollignies.* — Le hourdis a $0^{m}.10$ d'épaisseur; la largeur de travée est de $2^{m}.50$; la hauteur n de $0^{m}.38$; la largeur de nervure est de $0^{m}.20$.

La surcharge libre est de 300^{k}; le moment maximum, y compris le poids mort, peut être évalué à 14,300, la portée étant de 8 mètres.

On a ainsi :

$$h_0 = 0.253, \quad s = 0.2806. \quad I = 0.00071, \quad v' = 0.064, \quad v'' = 0.189.$$

Les formules pour le travail normal donnent :

$$\varepsilon_0 = 0^{m}.0240, \quad \omega = 0.003465, \quad \mu = 10,000.$$

De même ici, le travail réel est un peu plus élevé que nous n'admettons, en comptant sur la charge totale, considérée comme charge permanente ou normale, et non comme charge d'essai.

L'armature comprend 2 barreaux; le diamètre de chacun devrait être de 47 millimètres; il paraît être de 40 à 45.

3° *Entrepôt de Lausanne.* Le hourdis a $0^{m}.12$ d'épaisseur, la

largeur de travée est de $1^m.55$; la hauteur n est de $0^m.39$; la largeur de nervure est de $0^m.26$.

La surcharge est de $2,800^k$ par mètre carré, pour les épreuves d'essai; le moment est de 13550, la portée étant de $4^m.60$, d'où

$$h_0 = 0.234, \quad s = 0.2156, \quad I = 0.000604, \quad v' = 0.0762, \quad v'' = 0.1578.$$

On a, si l'on prend les formules s'appliquant aux charges d'épreuve supposées doubles de la charge normale :

$$\varepsilon_0 = 0.0566, \quad \omega = 0.00275, \quad \mu = 14,300.$$

chiffre conforme sensiblement au moment indiqué. D'où il résulterait que la surcharge de $2,800^k$ se présente dans des conditions tout à fait analogues à celles que supposent ces formules.

L'armature comprend deux barreaux, dont le diamètre doit, en conséquence, être égal à 41 ou 42 millimètres, ce qui semble correspondre aux indications graphiques.

4° *Collège Saint-Stanislas à Mons.* Le hourdis a $0^m.12$ d'épaisseur; la largeur de travée est de $3^m.05$; la hauteur n de $0^m.58$; la largeur de nervure de $0^m.40$.

La surcharge totale d'essai est de $40,000^k$ avec portée de 12^m, et fournit un moment égal à 60,000.

On a :

$$h_0 = 0.348, \quad s = 0.4572, \quad I = 0.01053, \quad v' = 0.0948, \quad v'' = 0.2532.$$

En appliquant les formules pour le cas de surcharge d'épreuve double de la charge normale :

$$\varepsilon_0 = -0.0730, \quad \omega = 0.00676, \quad \mu = 74,000.$$

Ici, on n'atteint pas tout à fait les conditions de travail supposées.

L'armature comprend 4 barreaux; chacun devrait avoir un diamètre de 46 à 47, et semble avoir 45 en réalité.

Proportions des hourdis.

Les proportions adoptées par les constructeurs, pour la nervure et son armature métallique, paraissent donc être assez bien d'accord avec les indications théoriques. Il nous reste à voir s'il en est de même pour les hourdis à section rectangulaire.

Reportons-nous donc aux formules antérieures, applicables plus spécialement aux hourdis, et que nous avons obtenues, soit par la considération des faibles charges en faisant intervenir la branche inférieure de la courbe limite; soit d'après les fortes charges avec la branche supérieure.

On a vu que, d'après les équations fondamentales, l'expression de n doit être de la forme $K\sqrt{\frac{\mu}{b}}$, et ω de la forme $K'\sqrt{b\mu}$, K et K' étant des coefficients constants.

Or, voici les résultats que l'on obtient avec les quatre constructions que nous venons de citer :

1° *Atelier d'Armentières.* — Par mètre courant, le hourdis a une surface de 1.00×2.00, ou 2 mètres carrés; une charge totale de 2×670^k, ou $1{,}340^k$, la surcharge étant de 400^k. Le moment est $1{,}340 \times \frac{2.00}{8}$, ou 335. La valeur de n est à peu près 0 .08. Ici, b est égal à 1 mètre.

On en conclut : $K = 0.0043$.

On sait que :

$$R'\omega(n - \varepsilon_0) = \mu.$$

Quand ε_0 est petit par rapport à n, ce qui arrive ordinairement, on peut simplifier sans grande erreur et écrire :

$$R'n\omega = \mu.$$

Si l'on prend pour R', travail normal du fer, le chiffre de 8^k par millimètre carré, ou 8×10^6; si, d'autre part, on exprime, comme nous l'avons fait dans les formules, la section du métal en milli-

mètres carrés, remplaçant ainsi ω par $\omega \times 10^6$; si, enfin, l'on remarque que le produit $n\omega$ est

$$K\sqrt{\frac{\mu}{b}} \times K'\sqrt{b\mu}, \quad \text{ou} \quad KK'\mu,$$

on en conclut que, dans l'expression de ω, le coefficient K' est égal à $\frac{1}{8\,K}$. Prenant un travail R' de 8^k, le coefficient deviendrait $\frac{1}{6\,K}$.

Dans l'exemple que nous examinons, il sera, par exemple, égal à $\frac{1}{8 \times 0.0043}$ ou à 29.0, et la section totale des barreaux devient $29.0\sqrt{1.00 \times 335}$, soit 550 millimètres carrés; ou 730 millimètres avec travail de 6^k. Le hourdis contient 4 barreaux par mètre courant; chacun doit donc avoir un diamètre de 14 à 16 millimètres; ce qui paraît conforme à l'exécution.

2° *Pensionnat à Ollignies.* — Le moment, pour le hourdis, est environ 400, d'après la portée indiquée; la valeur de n est $0^m.08$. On en conclut : K=0.0040.

La valeur de K' sera en conséquence 31.2 ou 41.5; et ω deviendra égal à 625 ou 833 millimètres carrés; à raison de 3 barreaux par mètre courant, le diamètre de chacun est de 16 à 18 millimètres.

3° *Entrepôt de Lausanne.* — La valeur de n est $0^m.10$. Le moment correspondant à la charge d'épreuve serait 960; pour la charge normale, il se réduit à 480, d'après ce qui a été dit ci-dessus. En suivant la même marche, on trouve K=0.0045.

On en conclut K'=27.7, ou 37.0, suivant la valeur attribuée à R'; le diamètre varie en conséquence de 14 à 16 millimètres pour 4 barreaux par mètre courant.

4° *Collège à Mons.* — Le moment correspondant à la surcharge totale est de 1.160, soit 580 pour la charge normale. La valeur de n est $0^m.10$; on en conclut : K=0.00424.

Pour K', on aura 29.5 ou 39.2; le diamètre sera, pour les 4 barreaux, égal à 18 ou 20 millimètres. Ces divers chiffres paraissent concorder avec l'exécution.

Il résulte de là que, pour ces trois exemples exécutés, la valeur de K varie de 0.0040 à 0.0045 et diffère peu de la moyenne 0.00425. Nous avons trouvé théoriquement que, avec un coefficient de sécu-

rité égal à $\frac{1}{7}$, ce coefficient devrait être 0.00438 pour la valeur de n, le coefficient correspondant étant alors 37.9 pour ω. Le chiffre déduit des proportions adoptées par les praticiens correspondrait donc à un coefficient de sécurité qui serait $\frac{1}{7}$ environ.

Le coefficient K′, dans l'expression de ω, prend une valeur correspondante, de 30 à 40 environ, suivant qu'on adopte pour le travail du fer 8^k ou 6^k par millimètre.

Finalement, la règle suivie par les constructeurs, en ce qui concerne les hourdis à section rectangulaire, peut se résumer ainsi :

$$n = 0.00425\sqrt{\frac{\mu}{b}}, \qquad \omega = 35\sqrt{b\mu} \text{ en moyenne.}$$

Elle est assez bien d'accord avec les formules théoriques et donne, comme nous venons de dire, une sécurité représentée par $\frac{1}{7}$ environ.

POIDS UNIQUE AU MILIEU

1° **Branche supérieure.** — Hourdis à section rectangulaire. — Flèches. — Section à nervure.
2° **Branche inférieure.** — Section rectangulaire ou à nervure. — Flèches. — Formules pratiques.

Nous allons reprendre les mêmes calculs pour le cas où, au lieu d'une charge uniformément répartie sur toute la portée, la pièce est chargée d'un poids unique placé au milieu de cette portée. La marche des calculs reste d'ailleurs la même.

1° BRANCHE SUPÉRIEURE.

Hourdis ou dalles à section rectangulaire.

Soit 2P le poids placé au milieu, $2l$ la portée totale; la hauteur réduite est $h = 3\varepsilon$, si ε est la distance du polygone des résultantes ou pressions, à la face supérieure. Ici ce polygone se réduit à une droite.

Le déplacement dû à la flexion centrale est $\int_{x=o}^{x=x_1} \frac{\mu f}{\mathrm{EI}} \times dx$.

L'expresion de μ est $\mathrm{N}(v - \varepsilon) = \frac{\mathrm{N}\varepsilon}{2}$, car $v' = v'' = \frac{3\varepsilon}{2}$.

La valeur de f est $n - \frac{3\varepsilon}{2}$; celle de I : $\frac{27\,b\,\varepsilon^3}{12}$. Nous remplaçons dx par $\frac{l}{n-\varepsilon_0}d\varepsilon$, car $\varepsilon = \varepsilon_0 + (n - \varepsilon_0)\frac{x}{l}$. Intégrant entre les limites $\varepsilon = \varepsilon_0$ et $\varepsilon = \frac{n}{3}$ qui correspondent à $x = o$ et $x = x_1$, on trouve

$$\frac{Nl}{3bEn(1-\theta)} \times \left[L_n 3\theta + \frac{2(1-3\theta)}{3\theta} \right],$$

si l'on pose comme précédemment : $\theta = \frac{\varepsilon_0}{n}$.

Pour évaluer le raccourcissement dû à la compression sur la partie centrale, remarquons que la section moyenne est $\frac{bn(1+3\theta)}{2}$, b étant la largeur de la pièce. Sur la longueur x_1 qui est égale à

$$\frac{l(n-3\varepsilon_0)}{3(n-\varepsilon_0)} = \frac{l(1-3\theta)}{3(1-\theta)},$$

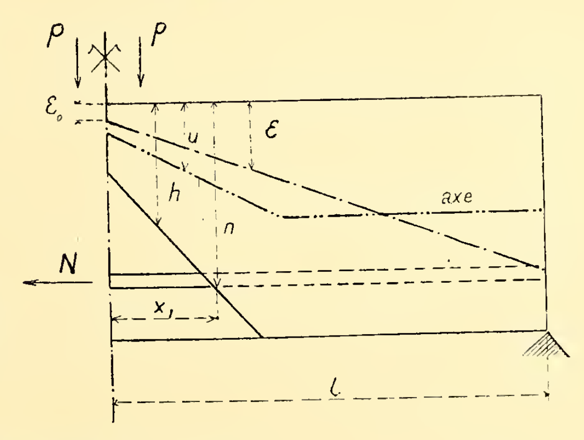
ce raccourcissement est finalement

$$\frac{2Nl(1-3\theta)}{3bEn(1-\theta)(1+3\theta)}.$$

L'allongement du barreau, sur la même longueur et sous la tension N est

$$\frac{Nl(1-3\theta)}{3r\omega E(1-\theta)},$$

Egalant cet allongement aux deux termes précédents, on trouve finalement la condition



$$\frac{bn}{r\omega} = \frac{L_n 3\theta}{1-3\theta} + \frac{2}{3\theta(1+3\theta)} \qquad (1)$$

L'équation des moments au centre donne

$$N = R'\omega = \frac{n(1-\theta)}{Pl}, \qquad (2)$$

P étant le demi-poids placé au milieu, l la demi-portée.

La compression R_1, par unité de surface, au sommet est

$$R_1 = \frac{2N}{3b\varepsilon_0} = \frac{2R'\omega}{3bn\theta} \qquad (3)$$

R' étant la tension du métal par unité de surface.

Dans la relation (1), on peut remplacer $\frac{bn}{r\omega}$ par $\frac{2R'}{3R_1 r\theta}$ tiré de la relation (3).

Pour faciliter les calculs a été dressé le tableau suivant des valeurs des différents termes qui entrent dans la relation (1) :

TABLEAU N° 3

	3θ	$L_n 3\theta$	$1-3\theta$	$\frac{L_n}{1-3\theta}$	$1+3\theta$	$3\theta(1+3\theta)$	$\frac{2}{3\theta(1+3\theta)}$	$\frac{bn}{r\omega}$	$\frac{2R'}{3rR_1}$
$\theta = 0.005$	0.015	— 6.503	0.985	— 6.602	1.015	0.0152	131.58	124.98	0.625
$\theta = 0.010$	0.030	— 3.506	0.97	— 3.609	1.03	0.0309	64.72	61.11	0.611
$\theta = 0.020$	0.060	— 2.814	0.94	— 2.993	1.06	0.0636	31.44	28.45	0.569
$\theta = 0.030$	0.090	— 2.408	0.91	— 2.646	1.09	0.0981	20.39	17.74	0.532
$\theta = 0.040$	0.120	— 2.121	0.88	— 2.410	1.12	0.1344	14.88	12.47	0.500
$\theta = 0.050$	0.150	— 1.897	0.85	— 2.235	1.15	0.1725	11.59	9.25	0.462
$\theta = 0.060$	0.180	— 1.715	0.82	— 2.091	1.18	0.2124	9.41	7.32	0.439
$\theta = 0.080$	0.240	— 1.427	0.76	— 1.877	1.24	0.2976	6.72	4.84	0.387
$\theta = 0.100$	0.300	— 1.204	0.70	— 1.720	1.30	0.3900	5.13	3.41	0.341
$\theta = 0.150$	0.450	— 0.799	0.55	— 1.454	1.45	0.6525	3.06	1.61	0.242
$\theta = 0.200$	0.600	— 0.511	0.40	— 1.277	1.60	0.9600	2.083	0.806	0.161

Flèches. — Nous établissons l'expression de la flèche, pour la partie centrale et pour la partie complémentaire, d'après les mêmes principes.

1° Dans la partie centrale, l'intégration de $\frac{\mu\,(l - x)}{EI}\,dx$, après avoir exprimé x et dx en ε et $d\varepsilon$, et entre les limites $\varepsilon = o$ et $\varepsilon = \frac{n}{3}$, conduit finalement à

$$F_1 = \frac{P'l^3}{9bEn^3(1-\theta)^3} \times \left\{ \frac{1-3\theta}{\theta} + L_n 3\theta \right\} = \frac{KP'l^3}{bEn^3}. \qquad (5)$$

P' étant la charge totale.

Les valeurs de K s'obtiennent comme suit, en fonction de θ qui doit avoir été déterminé au préalable :

TABLEAU N° 4.

	3θ	$\frac{1-3\theta}{\theta}$	$L_n 3\theta$	Σ	$\theta(1-\theta)^3$	K
$\theta=0.005$	0.015	197.0	-6.50	190.5	8.865	21.5
$\theta=0.010$	0.030	97.0	-3.506	93.5	8.730	10.7
$\theta=0.020$	0.060	47.0	-2.814	44.2	8.469	5.2
$\theta=0.030$	0.090	30.3	-2.408	27.9	8.217	3.4
$\theta=0.040$	0.120	22.0	-2.121	19.9	7.965	2.5
$\theta=0.050$	0.150	17.0	-1.897	15.1	7.713	2.0
$\theta=0.060$	0.180	13.7	-1.715	12.0	7.475	1.6
$\theta=0.080$	0.240	9.5	-1.427	8.1	7.011	1.1
$\theta=0.100$	0.300	7.0	-1.204	5.8	6.561	0.88
$\theta=0.150$	0.450	3.7	-0.799	2.9	5.526	0.53
$\theta=0.200$	0.600	2.0	-0.511	1.5	4.618	0.32

2° Dans la partie complémentaire, la flèche F_2 est, comme avec la charge uniforme, égale à $\frac{\mu_0' l_1^2}{3\ EI}$; mais ici μ_0', qui est le moment au point de scellement, est $N(v'-\varepsilon)=N[v'-\varepsilon_0-(n-v_0)\alpha]$, puisque les ε progressent suivant une ligne droite.

Remplaçant l_1 par $l\ (1-\alpha)$, il vient

$$F_2=\frac{Nl^2}{3EI}(1-\alpha_1)^2\times(n-\varepsilon_0)\times\left\{1-\alpha-\frac{n-v'}{n-\varepsilon_0}\right\};$$

et si l'on remplace N par $\frac{P'l}{2}$:

$$F_2=\frac{P'l^3}{6EI}(1-\alpha_1)^2\times\left[1-\alpha_1-\frac{n-v'}{n-\varepsilon_0}\right]. \qquad (6)$$

Section à nervure.

Les remarques faites au sujet des pièces soumises à une charge uniforme s'appliquent encore au cas présent. Les formules que nous venons d'établir pourront être employées pour les sections à nervures comme pour les sections rectangulaires.

2° BRANCHE INFÉRIEURE.

Section rectangulaire ou à nervure.

Faisant $\varepsilon = \varepsilon_0 + (n - \varepsilon_0)\alpha$ au lieu de $\varepsilon = \varepsilon_0 + (n - \varepsilon_0)\alpha^2$, la marche des calculs est la même que pour le cas d'une charge uniforme.

L'expression $\int_{x=o}^{x=x_1} \frac{\mu f}{EI} dx$ donne maintenant

$$\frac{N(n-v')}{EI} \times \left[(v' - \varepsilon_0)\alpha_1 - (n - \varepsilon_0) \frac{\alpha_1^2}{2} \right] \times l.$$

Tel est le déplacement dû à la flexion.

Le raccourcissement dû à la compression est $\frac{N\alpha_1 l}{Es}$.

L'allongement du métal est $\frac{N\alpha_1 l}{rE\omega}$. Nous rappelons que l'épaisseur utile h_0 est supposée constante.

Egalant l'allongement à la somme des deux premiers termes, la condition de déformation devient

$$v' - \varepsilon_0 - (n - \varepsilon_0)\frac{\alpha_1}{2} = \frac{\delta I}{n - v'}, \qquad (1)$$

Posons : $A = \frac{v'v''}{I} - \frac{1}{s}$ et $B = \frac{v''}{I}$; les A' et B' s'appliquant à la section dont la hauteur est n, distance de l'axe des barreaux à la face supérieure, la condition qui détermine le point où se fait le scellement, point où la tension du béton atteint la limite R_2 devient

$$R_2 = N[A' - B'\varepsilon_0 - B'(n - \varepsilon_0)\alpha_1]. \qquad (2)$$

La condition qui exprime que, au milieu de la portée, la face inférieure de la section réduit est à la limite de tension, reste

$$R_2 = N[A - B\varepsilon_0]. \qquad (3)$$

Les conditions (4) et (5) deviennent

$$N = \frac{Pl}{n(1-\theta)} = R'\omega. \qquad (4)$$

et

$$R_1 = R_2 + \frac{2N}{s} \qquad (5)$$

ou

$$R_1 = -R_2 + \frac{Nh(v'-\varepsilon)}{I} \qquad (5\ bis)$$

Suivant que la section est rectangulaire ou armée d'une nervure. P est le demi-poids appliqué au milieu.

On en tirerait des expressions analogues à celles que nous avions obtenues avec la charge uniforme :

$$\varepsilon_0 = \frac{A - A' + 2B'\left(v' - \frac{\partial I}{n - v'}\right)}{B + B'},$$

$$\alpha_1 = \frac{A' - A - (B' - B)\varepsilon_0}{B'(n - \varepsilon_0)},$$

$$N = R'\omega = \frac{R_2}{A - B\varepsilon_0}.$$

Prenons comme premier exemple une des dalles de M. Cottancin. expérimentées au laboratoire des ponts et chaussées, du type des numéros 7 et 8, avec 11 barreaux. Ces dalles étant âgées d'un mois, nous prendrons pour r le rapport 20 des bétons moyens. La valeur de n est 0.03 environ.

Procédant comme la première fois nous trouvons :

	s	v'	I	∂	A	B	$v' - \frac{\partial I}{n - v'}$	ε_0	α_1
$h=0.040$	0.0176	0.0200	0.000002350	359	114	8522	—0.06436	—0.08368	0.462
$h=0.030$	0 0132	0.0150	0.000000990	378	150	15000	—0.00995	—0.00995	0
$h=0.025$	0.0110	0.0125	0.000000573	394	180	21600	—0.00004	+0.00050	<0
$h=0.020$	0.0088	0.0100	0.000000293	416	225	33750	+ 0.00391	+0.00391	<0
$h=0.017$	0. 0075	0.0085	0.000000180	436	265	38070	+0.00485	+0.00490	0
$h=0.015$	0.0066	0.0075	0.000000113	454	300	60000	+0.00502	+0.00400	0.074
$h=0.010$	0.0044	0.0050	0.0000000367	530	450	135000	+0.00442	+0.00285	0.103
$h=0.005$	0.0022	0.0025	0.0000000046	772	900	540000	+0.00237	+0.00148	0.06

On en conclut qu'il faut en réalité prendre $\alpha_1 = 0$ jusqu'à $h = 0.017$,

en donnant aux ε_0 correspondants la valeur $v' - \frac{\partial I}{n - v'}$; conserver les valeurs de α_1 jusqu'à $h = 0.010$; conserver au-delà la valeur 0.103.

Comme dans le cas d'une charge uniforme appliquée à une section armée de nervure, le cas d'un poids unique appliqué à une dalle rectangulaire présente les mêmes faits, dans le même ordre : au début α_1 sensiblement nul, puis augmentant pour atteindre un maximum; les ε_0, d'abord négatifs, augmentant également jusqu'à un maximum.

Le tableau rectifié devient, en prenant $R_2 = 20 \times 10^4$ ou $R_2 = 30 \times 10^4$

	α_1	ε_0	$R_2 = 200000^k$		$R_2 = 300000^k$		$R^2_2 = 200000^K$	
			N	2P	N	2P	R′	R_1
$h_0 = 0.040$	0	-0.06436	305^k	45^k	455^k	65^k	$1^k.8$	$23^k.5$
$h_0 = 0.030$	0	-0.00995	670^k	110^k	1000^k	160^k	$3^k.9$	$30^k.1$
$h_0 = 0.025$	0	-0.00040	1055^k	130^k	1580^k	192^k	$6^k.3$	$39^k.2$
$h_0 = 0.020$	0	$+0.00391$	2150^k	225^k	3225^k	335^k	$12^k.8$	$68^k.9$
$h_0 = 0.017$		$+0.00435$	2500^k	250^k	3750^k	377^k	$15^k.0$	$86^k.6$
$h_0 = 0.015$	0.074	$+0.00400$	3335^k	345^k	5000^k	520^k	$20^k.0$	$121^k.0$
$h_0 = 0.010$	0.103	$+0.00285$	3080^k	335^k	4615^k	500^k	»	»
$h_0 = 0.005$	»	»	»	»	»	»	»	»

La rupture de ces pièces s'est produite à 520^k et 580^k, ce qui semble coïncider avec la charge maxima qui ne pourrait être dépassée d'après ce genre de calcul. Mais, comme nous l'avons dit, pour les très fortes charges ce sont les formules du cas précédent qui doivent être adoptées de préférence.

Ici la valeur de α_1 reste nulle jusqu'à des charges qui dépassent notablement la charge normale, laquelle ne saurait guère excéder $\frac{580}{7}$ ou 85^k.

Pour constater de nouveau l'influence des variations dans la valeur du rapport r, prenons celui-ci égal à 10, comme pour les bétons âgés de l'expérience de Lausanne :

	∂	$v' - \dfrac{\partial I}{n - v'}$	ε_0	α_1
$h_0 = 0.040$	664	— 0.13600	— 0.17500	0.413
$h_0 = 0.030$	681	— 0.03030	— 0.03030	0
$h_0 = 0.025$	696	— 0.01030	— 0.00789	<0
$h_0 = 0.020$	720	— 0.00004	— 0.00150	<0
$h_0 = 0.017$	738	+ 0.00212	+ 0.00330	<0
$h_0 = 0.015$	758	+ 0 00336	+ 0.00333	0
$h_0 = 0.010$	833	+ 0.00378	+ 0.00275	0.073
$h_0 = 0.005$	1060	+ 0.00240	+ 0.00148	0.063

Nous sommes ainsi conduits aux valeurs définitives :

	α_1	ε_0	$R_2 = 200000^k$		$R_2 = 300000^k$	
			N	2P	N	2P
$h_0 = 0.040$	0	— 0.13600	180^k	115^k	270^k	175^k
$h_0 = 0.030$	0	— 0.03030	440^k	105^k	660^k	160^k
$h_0 = 0.025$	0	— 0.01030	900^k	145^k	1350^k	220^k
$h_0 = 0.020$	0	— 0.00004	885^k	105^k	1330^k	160^k
$h_0 = 0.017$	0	+ 0.00212	800^k	97^k	1200^k	145^k
$h_0 = 0.015$	0	+ 0.00333	2000^k	215^k	3000^k	320^k
$h_0 = 0.010$	0.073	+ 0.00275	2500^k	270^k	3750^k	410^k
$h_0 = 0.005$	0.073	+ 0.00132	1100^k	130^k	1650^k	190^k

Ici se trouve plus marquée la période d'hésitation où la tension ne se développe que moyennant des retours en arrière ; ceux-ci ne se manifestent probablement que pendant la première mise en charge. Nous voyons également que, contrairement à ce qu'on aurait pu supposer, une valeur plus grande de r, qui implique un coefficient d'élasticité plus élevé, ne correspond pas à une plus forte résistance ; car les charges maxima de la seconde série sont plus élevées que celles de la première. Les différences ne sont d'ailleurs pas en proportion de la variation de r qui passe du simple au double.

Deuxième exemple. — A la même série d'expériences nous emprunterons un second exemple, le n° 17 qui comportait 26 barreaux et dont l'armature était par conséquent beaucoup plus forte.

Les éléments de calcul sont les suivant, avec $r = 20$:

	s	v'	I	δ	A	B	$v' - \frac{\delta I}{n - v'}$	ε_0	α_1
$h_0 = 0.040$	0.010070	0.0200	0.0000022672	185	118	8825	−0.021943	−0.0296	0.137
$h_0 = 0.030$	0.012750	0.0150	0.0000009564	205	157	15700	+0.001929	+0.00193	0
$h_0 = 0.025$	0.010625	0.0125	0.0000005536	220	188	22600	+0.005541	+0.00536	0.017
$h_0 = 0.020$	0.008500	0.0100	0.0000002834	244	235	35300	+0.006543	+0.00556	0.089
$h_0 = 0.015$	0.006375	0.0075	0.0000001196	283	314	62800	+0.005996	+0.00440	0.130
$h_0 = 0.010$	0.004250	0.0050	0.0000000354	361	471	141300	+0.004489	+0.00289	0.115
$h_0 = 0.005$	0.002125	0.0025	0.0000000044	598	942	565200	+0.002404	+0.00148	0.063

et conduisent aux résultat définitifs :

	α_1	ε_0	$R_2 = 200000^k$		$R_2 = 250000^k$	
			N	2P	N	2P
$h_0 = 0.040$	0	− 0.021943	325^k	70^k	805^k	85^k
$h_0 = 0.030$	0	+ 0.001929	1390^k	90^k	1960^k	110^k
$h_0 = 0.025$	0.017	+ 0.00536	2960^k	145^k	3700^k	180^k
$h_0 = 0.020$	0.089	+ 0.00556	5120^k	335^k	6400^k	420^k
$h_0 = 0.015$	0.130	+ 0.00440	5300^k	290^k	6630^k	365^k
$h_0 = 0.010$	0.130	+ 0.00523	<0	»	<0	»
$h_0 = 0.005$	0.130	+ 0.00258	<0	»	<0	»

La rupture de cette pièce a eu lieu pour 460^k, chiffre qui ne s'écarterait pas beaucoup du maximum de charge.

On remarquera que, dans cette pièce où l'armature extraordinairement renforcée n'a rien des proportions ordinaires, la période pendant laquelle α_1 reste sensiblement nul est beaucoup plus courte; et que le sommet du polygone des pressions s'abaisse beaucoup plus rapidement.

Flèches. — Un calcul tout à fait semblable à celui de la charge uniforme, sauf la substitution de α_1 à α_1^2 dans l'expression de ε, donne les formules suivantes :

1° Pour la partie centrale

$$F_1 = \frac{P'\alpha_1 l^3}{2EI} \times \left\{ \frac{v' - \varepsilon_0}{n - \varepsilon_0}\left(1 - \frac{\alpha_1}{2}\right) - \alpha_1^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha_1}{3}\right) \right\}. \qquad (5')$$

2° Pour la partie complémentaire, l'expression (6′) déjà calculée

pour le cas déduit de l'étude de la branche supérieure, subsiste sans modifications :

$$F_2 = \frac{P'l^3}{6EI}(1-\alpha_1)^2 \times \left[1 - \alpha_1 - \frac{n - v'}{n - \varepsilon_0}\right]. \qquad (6')$$

P' étant la charge totale 2P.

Formules pratiques.

Dans la première méthode, déduite de la limite prise sur la branche supérieure, nous avons trois relations semblables à celles que nous avions obtenues pour la charge uniforme. Les relations (2) et (3) qui servent à déterminer n et ω deviendront identiques avec celles du poids unique, si nous remplaçons dans celle-ci Pl par μ, et dans les premières $\frac{pl^2}{2}$ par μ.

Les expressions α et β de n et ω, déjà obtenues, sont donc applicables au cas actuel, à la condition de représenter par μ le moment de flexion de la poutre chargée en son milieu. Il faut toutefois remarquer les valeurs de θ qui entraient dans ces expressions, et qu'il faut déduire des équations (1) différentes dans les deux cas, doivent être empruntées au tableau n° 3 et non plus au tableau n° 1.

Dans la seconde méthode, les relations (1) à (5) ne différaient, de l'un à l'autre cas, que par la substitution de α_1^2 à α_1. Or si nous adoptons $\alpha_1 = 0$, il est clair que les deux séries deviennent identiques. On peut donc dire que les formules déjà posées, pour cette seconde méthode, s'appliquent ici sans autre modification que la signification différente prise par le moment μ.

Comme l'on a, en général, à s'occuper plutôt des charges normales, relativement faibles, que des charges avoisinant la rupture auxquelles s'applique surtout la première méthode, on peut donc considérer les formules déjà établies comme étant générales.

Quant aux formules obtenues par la troisième méthode, et qui supposent également $\alpha_1 = 0$, elles s'appliquent aussi bien à la charge isolée qu'à la charge uniformément répartie, μ étant toujours le moment de flexion calculé d'après le mode de répartition de la charge.

COMPARAISON
AVEC LES RÉSULTATS D'EXPÉRIENCES.

Travail-limite des matériaux. — Charge uniforme. — Poids unique au milieu.
Comparaison des flèches calculées et des flèches observées. — Charge uniforme. Poids unique au milieu.
Comparaison des charges normales et des charges-limites. — Dalles en ciment. — Poutres à nervures.
Efforts tranchants et de glissement longitudinal. — Dalles ou hourdis. — Poutres à nervure. — Remarque.

TRAVAIL-LIMITE DES MATÉRIAUX.

Un certain nombre d'expériences, faites soit sur des poutres à nervures, soit sur des dalles à section rectangulaire, ont été poussées jusqu'à la rupture. Pour les charges très fortes, nous savons que les formules obtenues par la première méthode peuvent être considérées comme devant représenter exactement les faits; en les appliquant donc aux résultats connus, nous en pouvons conclure la valeur de r qu'il convient d'adopter pour ces cas extrêmes.

Les expériences, aujourd'hui plus nombreuses, qui avaient pour but de faire connaître la valeur du coefficient d'élasticité pour les bétons et mortiers de ciment, ainsi que les variations de ce coefficient suivant l'élévation du travail, nous ont appris qu'il est relativement élevé pour les faibles charges et qu'il varie peu au début; ensuite il diminue, assez régulièrement, semble-t-il, en suivant une loi qui ne serait pas sans analogie avec celle qu'on a observée pour le fer.

Le coefficient du métal et celui du béton variant avec la charge,

chacun de son côté, il se peut que leur rapport r soit très différent pour les faibles et les fortes charges ; il se peut aussi que la différence ne soit pas très considérable si la loi de variation suit une marche analogue pour les deux matériaux.

Lorsque la charge est peu considérable, le travail peu élevé, les expériences connues montrent que le rapport r peut descendre jusqu'à 5 ou 7 environ pour les bétons ou mortiers les plus consistants, ayant déjà une date de fabrication un peu ancienne ; qu'il est de 20 en moyenne pour des charges un peu plus fortes et pour des bétons de qualité moyenne ; qu'il peut s'élever beaucoup plus haut pour les bétons récents. On peut dire à l'avance, au moins d'une manière approximative, que, sous les charges normales, les bétons présentés dans de bonnes conditions moyennes doivent avoir un coefficient d'élasticité variable de 1 à 2×10^9, celui du métal étant de 20×10^9 ; ce qui implique un rapport de 20 à 10.

Que devient ce rapport pour les charges avoisinant la rupture ? C'est ce que nous allons essayer d'étabir.

Charge uniforme.

1° *Expériences de Lausanne.* — Dans cette poutre les éléments les plus importants étaient

$$b = 1^m.50, \qquad n = 0^m.24, \qquad \omega = 0.001414.$$

Si nous supposions $r = 5$, on aurait au moyen du tableau n° 1 :

$$\frac{bn}{r\omega} = 50.9, \qquad \theta = 0.031, \qquad \varepsilon_0 = 0.00744, \qquad h_0 = 3\varepsilon_0 = 0.02232.$$

La rupture a lieu vers $25,000^k$, ce qui correspond à un moment de $25,000 \times \frac{5.26}{8}$ ou 16,440. La tension N est $\frac{\mu}{n - \varepsilon_0}$ ou $\frac{16440}{0.23256}$, soit $70,680^k$; d'après la section ω, on conclut que le travail R′ était de 50^k par millimètre.

Le travail maximum de compression serait $\frac{2 \times 70680}{1.50 \times 0.02232}$, ou 424^k par centimètre carré. Il n'est guère admissible que le béton,

même âgé, ait pu réaliser une résistance aussi élevée; la valeur de r est donc trop faible.

Si l'on prend $r=10$, on a

$$\frac{bn}{r\omega}=25.45, \qquad \theta=0.047, \qquad \varepsilon_0=0.0113, \qquad 3\varepsilon_0=0.0339.$$

Calculant de même, on trouve $N=71{,}900^k$, d'où $R'=50^k8$, et $R_1=283^k$ par millimètre carré. Ce dernier chiffre peut être admissible pour un béton âgé de plus d'un an.

Si l'on augmentait encore la valeur de r, la compression R_1 diminuerait, il est vrai, mais le travail R' du fer augmenterait encore; or le chiffre de $50^k.8$ est déjà la limite extrême que l'on puisse accepter.

Il résulte de ce calcul que le rapport r à adopter pour la poutre de Lausanne, avec les très fortes charges, devrait se tenir aux environs du chiffre 10, qui paraît être aussi celui qui convient pour les charges normales.

2° *Expériences de M. Meley à Alger.* — Cette dalle avait les proportions suivantes :

$$b=0^m.76, \qquad n=0^m.043, \qquad \omega=0.00034.$$

Supposons d'abord $r=10$, ce qui conduit à

$$\frac{bn}{r\omega}=9.6, \qquad \theta=0.08, \qquad \varepsilon_0=0.00344, \qquad h_0=3\varepsilon_0=0.01032.$$

On peut prendre $\mu=465$ environ en tenant compte de la répartition de charge; d'où l'on conclut

$$N=\frac{465}{0.03956}=11750^k, \qquad R'=\frac{11750}{344}=35^k \text{ p. mm. q.},$$

$$R_1=\frac{2\times 11750}{0.76\times 0.01032}=301^k.$$

par centimètre carré; chiffre qui semble exagéré pour du béton ordinaire dans le cas présent.

Prenant donc $r=20$.

$$\frac{bn}{r\omega}=4.8, \qquad \theta=0.12, \qquad \varepsilon_0=0.00516, \qquad h_0=3\varepsilon_0=0.01548;$$

d'où l'on tirera par le même calcul :

$$N=12280^k, \qquad R'=36^k.1, \qquad R_1=209^k.$$

Ici le rapport r semble être de 20, et ce chiffre est aussi celui qu'il conviendrait d'adopter pour les charges normales.

3° *Expériences de M. de Mollins à Lausanne.* — Cette pièce, en forme de T à petites ailes, a les proportions suivantes :

$$b = 0^m.29, \qquad n = 0^m.28, \qquad \omega = 0.000283,$$

ce qui donne, avec $r = 10$:

$$\frac{bn}{r\omega} = 28.6, \qquad \theta = 0.044, \qquad \varepsilon_0 = 0.01232, \qquad h_0 = 3\varepsilon_0 = 0.03696.$$

La rupture ayant eu lieu pour $8,736^k$, le moment correspondant est $8,736 \times \frac{3.00}{8}$ ou 3,276. On en conclut :

$$N = \frac{3276}{0.26768} = 12240^k, \qquad R' = \frac{12240}{283} = 43^k.2 \text{ p. mm. q.},$$
$$R_1 = \frac{2 \times 12240}{0.29 \times 0.03696} = 228^k.$$

par centimètre.

Avec $r = 20$:

$$\frac{bn}{r\omega} = 14.3, \qquad \theta = 0.065, \qquad \varepsilon_0 = 0.0182, \qquad h_0 = 3\varepsilon_0 = 0.0546,$$

d'où

$$N = 12500^k, \qquad R' = 44^k, \qquad R_1 = 160^k.$$

Le chiffre de 160^k pour la compression ne suffirait probablement pas pour expliquer la rupture, et celui de 228^k paraît plus voisin de la réalité ; toutefois cette rupture a pu se produire par la fatigue du métal travaillant à 43^k ou 44^k. Comme, dans l'expérience, le ciment s'est manifestement écrasé à la face supérieure, tandis que plusieurs fissures s'étendaient et s'élargissaient à la face inférieure, il est à penser que le véritable rapport r est voisin de 10.

POIDS UNIQUE AU MILIEU.

4° *Dalle de M. Cottancin, n°s 7, 8.* — Les éléments sont

$$b = 0^m.445, \qquad n = 0.03, \qquad \omega = 0.000165 \quad (11\ \textit{barreaux}).$$

Nous devons faire remarquer que l'estimation de la distance n pour ces dalles très minces est extrêmement délicate; d'autant plus qu'elles étaient armées d'un double réseau de fils de fer longitudinaux et de fils transversaux, passant alternativement les uns par dessus des autres. Par suite de ces inflexions en tous sens il est assez difficile de prendre pour l'axe des barreaux une position moyenne qui représente la réalité.

On en conclut, avec $r = 10$:

$$\frac{bn}{r\omega} = 8.20, \qquad \theta = 0.055, \qquad \varepsilon_0 = 0.00165, \qquad h_0 = 3\varepsilon_0 = 0.00495.$$

La rupture s'est produite à 520^k et 580^k; la moyenne donne un moment égal à $560 \times \frac{1^m.00}{4}$, ou 138. De là

$$N = \frac{138}{0.02835} = 4870^k, \qquad R' = \frac{4870}{165} = 29^k.5 \text{ p. mm. q.},$$

$$R_1 = \frac{2 \times 4870}{0.0445 \times 0.00495} = 443^k,$$

chiffre évidemment exagéré.

Avec $r = 20$

$$\frac{bn}{r\omega} = 4.10, \qquad \theta = 0.09, \qquad \varepsilon_0 = 0.0027, \qquad h_0 = 3\varepsilon_0 = 0.0081$$

et

$$N = 5055^k, \qquad R' = 30^k.7, \qquad R_1 = 280^k.$$

Comme le mortier n'était âgé que d'un mois, ce dernier chiffre est sans doute un peu exagéré encore, et le rapport r est ici un peu plus grand que 20.

5° *Dalle n° 17.* — On a :

$$b = 0.425, \qquad n = 0.03, \qquad \omega = 0.000395 \quad (26\ \textit{barreaux}).$$

Avec $r = 10$:

$$\frac{bn}{r\omega} = 3.23, \qquad \theta = 0.10, \qquad \varepsilon_0 = 0.0030, \qquad h_0 = 3\varepsilon_0 = 0.0090.$$

La rupture a lieu pour 460^k; le moment est $460 \times \frac{2^k.00}{4}$ ou 230.

$$N = \frac{230}{0.0270} = 8520^k, \qquad R' = \frac{8520}{395} = 21^k.5 \text{ p. mm. q.},$$

$$R_1 = \frac{2 \times 8520}{0.425 \times 0.0090} = 445^k.$$

par centimètre; chiffre très exagéré.

Avec $r = 20$:

$$\frac{bn}{r\omega} = 1.61, \qquad \theta = 0.15, \qquad \varepsilon_0 = 0.0045, \qquad h_0 = 3\varepsilon_0 = 0.0135,$$

$$N = 9000^k, \qquad R' = 22^k.7, \qquad R_1 = 313^k,$$

chiffre plus voisin de la vérité. Ici de même, r paraît un peu supérieur à 20.

6° *Dalles* n°s 5, 6. — On a pour $r = 10$:

$$b = 0.400, \qquad n = 0.03, \qquad \omega = 0.000152 \quad (10 \textit{ barreaux}).$$

d'où

$$\frac{bn}{r\omega} = 7.8, \qquad \theta = 0.059, \qquad \varepsilon_0 = 0.00177, \qquad h_0 = 3\varepsilon_0 = 0.00531$$

et

$$N = \frac{132}{0.0247} = 5345^k, \qquad R' = \frac{5345}{152} = 35^k.1 \text{ p. mm. q.},$$

$$R_1 = \frac{2 \times 5345}{0.40 \times 0.00531} = 507^k.$$

par centimètre.

Avec $r = 20$, on trouverait

$$N = 6200^k, \qquad R' = 40^k, \qquad R_1 = 362^k,$$

Avec $r = 30$:

$$N = 6800^k, \qquad R' = 45^k, \qquad R_1 = 315^k.$$

Cette dernière valeur de R' est déjà forte; il en faut sans doute conclure que le mortier de ces échantillons d'expérience avait une

assez forte résistance, assez rapprochée de 300^k; et que la valeur de r se rapprochait parfois de 30. Du reste ces dalles ne sont pas de la même fabrication que les n°s 5, 6.

Ces indications tendraient donc à prouver que le rapport des coefficients d'élasticité pour le fer et le ciment ne varie pas dans des limites très étendues, lorsqu'on passe des charges ordinaires aux très fortes charges.

COMPARAISON DES FLÈCHES CALCULÉES ET DES FLÈCHES OBSERVÉES.

Nous avons établi les formules qui permettent de calculer la flèche, soit pour la partie centrale, soit pour la partie complémentaire, avec charge uniforme ou avec poids unique placé au milieu. Nous allons passer en revue les résultats d'un certain nombre d'expériences, déterminer par le calcul les flèches totales correspondantes et les comparer avec les résultats observés.

Les formules établies d'après la première méthode doivent en général donner des chiffres un peu trop élevés, puisque l'on y supprime toute résistance du ciment à la tension.

Par la seconde méthode nous devons arriver à des chiffres un peu trop faibles ; en effet, elle admet, en faisant $\alpha_1 = 0$, que la partie centrale désagrégée n'a aucune étendue en largeur ; or, en réalité, l'équilibre nouveau qui s'établit à chaque accroissement de la charge n'intervient pas immédiatement, ce qui supposerait pour cet accroissement une progression insensible ; un nouveau chargement produit toujours un accroissement brusque. La valeur de α_1 n'est donc pas rigoureusement nulle.

Avec $\alpha_1 = 0$, la flèche F_1 de la partie centrale est nulle ; en réalité, cette partie centrale fournit une flèche peu importante, en général, que nous négligeons entièrement.

Charge uniforme.

1° *Poutre de Lausanne.* — Calculons d'abord au moyen des formules déduites de la première méthode.

Si nous adoptons $r=10$, valeur qui s'adapte aux fortes charges, comme nous l'avons vu, on a

$$\frac{bn}{r\omega}=\frac{1.50\times 0.24}{10\times 0.001414}=25.4, \qquad \theta=0.047, \qquad K=4.5,$$

au moyen des tableaux 1 et 2.

La flèche de la partie centrale est

$$F_1=K\times\frac{P'l^3}{Ebn^3}=4.7\,P'\times\frac{\overline{2.63}^3}{2\times 10^9\times 1.5\times \overline{0.24}^3}=\frac{20.4\,P'}{10^7}.$$

Pour calculer la flèche F_2 il faut, au préalable, déterminer la quantité α_1 déduite de la relation :

$$3\varepsilon_1=3[\varepsilon_0+(n-\varepsilon_0)\alpha_1^2]=n.$$

D'où

$$\alpha_1^2=\frac{n-3\,\varepsilon_0}{3(n-\varepsilon_0)}.$$

Or, si $\theta=0.047$, $\varepsilon_0=0.047\times 0.24=0.0113$. On en conclut : $\alpha_1=0.55$; et par conséquent :

$$F_2=\frac{P'l^3}{12EI}\times(1-\alpha_1)^2\times\left(1-\alpha_1^2-\frac{n-v'}{n-\varepsilon_0}\right)=$$

$$=P'\times\frac{2.63^3}{12\times 2\times 10^9\times I}\times\overline{0.45}^2\left(1-\overline{0.55}^2-\frac{0,24-0.072}{0.24-0.0113}\right).$$

La valeur de v' et I se rapportent à la section totale de la pièce, qui est connue. Cette expression est sensiblement nulle; et c'est d'ailleurs ce qui arrive habituellement pour cette flèche complémentaire, calculée d'après la première méthode. La flèche qui se produit sur la partie restée intacte, depuis le point de scellement jusqu'à l'appui, est généralement négligeable. On remarque, en effet, sur les pièces mises en expérience, que cette partie complémentaire reste sensiblement rectiligne, au lieu de s'infléchir progressivement comme dans les pièces homogènes ordinaires.

Remplaçant donc P', charge totale, par des valeurs successives, nous trouvons :

$P'=5000^k.\quad F=F_1=0.0102$
$P'=10000^k,\quad F=F_1=0.0204$
$P'=15000^k,\quad F=F_1=0.0306$

Employons maintenant la seconde méthode. Ici, c'est au contraire F_1 qui est sensiblement nul, au moins pour les faibles charges, et tant que α_1 est nul.

Pour les fortes charges, la valeur de α_1 a été calculée lorsque nous avons analysé les conditions de travail de cette poutre ; comme on sait, la valeur de F_1 sera déterminée par la relation (4') :

$$F_1 = \frac{P'\alpha_1 l^3}{4EI} \times \left\{ \frac{v' - \varepsilon_0}{n - \varepsilon_0}\left(1 - \frac{\alpha_1}{2}\right) - \alpha_1^2\left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha_1}{4}\right) \right\}$$

où l'on substituera les valeurs trouvées pour α_1. Nous rappelons que la valeur de I, moment d'inertie pour la pièce totale renforcée par les barreaux, doit être calculée en remplaçant ceux-ci par une quantité équivalente de ciment; c'est pourquoi cette valeur doit être ici portée de 0.00073 à 0.0011.

Les ε_0 ont été calculés également dans l'analyse antérieure.

La flèche F_2 se calcule d'après la relation (5') :

$$F_2 = \frac{P' l^3}{12EI}(1 - \alpha_1^2) \times \left(1 - \alpha_1^2 - \frac{n - v'}{n - \varepsilon_0}\right),$$

au moyen de la même valeur attribuée à α_1. On trouve ainsi, tous calculs faits :

	N	P'	α_1	ε_0	F_1	F_2	F	OBSERVATIONS
$h_0 = 0.145$	9250k	3500k	0	—0.0030	0	0.0007	0.0007	On n'a pas tenu compte de la flèche initiale, mais nous prenons pour P' la surcharge des expériences sans tenir compte du poids mort, ce qui fait compensation.
$h_0 = 0.08$	31000k	10900k	0.21	+0.0113	0.0081	0.0011	0.0092	
$h_0 = 0.06$	44000k	15550k	0.25	+0.0150	0.0142	0.0012	0.0152	

Comme nous le disions, de ces deux séries de valeurs les unes sont au-dessus, les autres au-dessous de la réalité. De ce tableau on peut déduire, par interpolation, les valeurs approximatives des flèches correspondant aux mêmes charges.

Faisant les moyennes des deux séries, on trouve

	Flèche moyenne.	Flèche observée.
P' = 5000k	$\frac{0.0102 + 0.0008}{2} = 0^m.0055$	0m.0044 à 0m.0056
P' = 11000k	$\frac{0.0220 + 0.0092}{2} = 0^m.0156$	0m.124
P' = 15500k	$\frac{0.0310 + 0.0152}{2} = 0^m.0231$	0m.245

2° *Poutre de Bruxelles.* — Prenons $r = 60$, par exemple, d'après les motifs déjà exposés.

Par la première méthode, ayant

$$\frac{bn}{r\omega} = 4.6, \qquad \theta = 0.12 \text{ à } 0.13, \qquad \varepsilon_0 = 0.0263, \qquad K = 1.00,$$

On trouve, sous la charge de 4,110ᵏ :

$$F_1 = 1.00 \times \frac{4110^k \times \overline{2.35}^2}{0.33 \times 10^9 \times 1.00 \times \overline{0.21}^3} = 0.019.$$

La flèche F_2 est négligeable.

Par la seconde méthode et au moyen des formules déjà rappelées, on trouverait, comme on l'a vu antérieurement :

	N	P′	α_1	ε_0	F_1	F_2	F
$h = 0.10$	13045ᵏ	4110ᵏ	0.29	0.0248	0.017	»	0.0107

Faisant de même la moyenne

	Flèche moyenne.	Flèche observée.
$P' = 4110^k$	$\frac{0.0190 + 0.0107}{2} = 0^m.015$	$0^m.015$

3° *Expérience de M. de Mollins, à Lausanne.* — Pour celle-ci, nous n'avons pas établi, au préalable, comme pour les poutres précédentes, les calculs nécessaires à l'application de la seconde méthode, nous nous bornerons donc à faire usage de la première qui doit nous donner des résultats un peu trop élevés.

Ayant

$$\frac{bn}{r\omega} = 28.6, \qquad \theta = 0.044, \qquad \varepsilon_0 = 0.0123, \qquad K = 5.00,$$

on trouve, avec $r = 10$:

$$F_1 = 5.00 \times P' \times \frac{\overline{1.50}^3}{2 \times 0.29 \times \overline{0.285}^3} = 0.0000012\,P'$$

ce qui conduit à

Charge en atmosphères.	Charge en kilogr.	F_1	Flèche observée.
$5^{atm.}$	3120^k	0.0037	0.0025
$10^{atm.}$	6240^k	0.0074	0.0065
$14^{atm.}$	8740^k	0.0105	rupture

en négligeant la flèche F_2.

Avec $r=10$, on trouverait des chiffres plus élevés ; ce qui tend à indiquer que la valeur de r est à peu près la même pour ces diverses charges que dans le voisinage de la rupture, égale à 10 environ.

4° *Expériences de M. Meley, à Alger.* — On a, avec $r=20$:

$$\frac{bn}{r\omega}=4.8, \qquad \theta=0.11 \text{ à } 0.12, \qquad \varepsilon_0=0.00516, \qquad K=1.10$$

et

$$F_1=1.00\times\frac{0.\overline{625}^3\,P'}{1\times10^9\times0.76\times0.\overline{043}^3}=0.00000450\,P'.$$

On en conclut, F_2 étant négligeable :

Charge.	Flèche calculée.	Flèche observée.
1000^k	0.0045	0.0040
2000^k	0.0090	0.0090
3000^k	0.0135	0.0135
4000^k	0.0180	rupture

Les résultats étant identiques, tandis que nous devrions avoir des résultats théoriques un peu supérieurs aux flèches observées, on en peut conclure que la véritable valeur de r est un peu supérieure à 20. Cette concordance prouve, en tous cas, que les résultats calculés et les flèches observées suivent bien une marche semblable.

Ici encore la valeur de r semble rester la même sous les diverses charges jusqu'aux plus élevées.

Poids unique au milieu.

5° *Dalles de M. Cottancin, n*os 7, 8. — Pour ces diverses dalles, nous connaissons la flèche correspondant à la charge qui, d'après les observations, paraissait correspondre à la limite d'élasticité.

Sous la charge de 180k, avec le rapport $r = 20$, obtenu d'après les fortes charges, nous aurions, au moyen des formules établies :

1re Méthode :

$$\frac{bn}{r\omega} = 4.05, \qquad \theta = 0.082, \qquad \varepsilon_0 = 0.0025, \qquad K = 1.00,$$

$$F_1 = 1.00 \times \frac{180 \times \overline{0.50}^3}{0.44 \times \overline{0.03}^3 \times 1 \times 10^9} = 0.0020$$

Comme

$$\alpha_1 = \frac{0.03 - 0.0075}{3(0.03 - 0.0025)} = 0.27,$$

$$F_2 = \frac{180 \times \overline{0.50}^3 (1 - 0.27)^2}{6 \times 1 \times 10^9 \times 0.000003} \times \left(1 - 0.27 - \frac{0.03 - 0.0025}{0.03 - 0.02}\right) = 0.00025$$

$$F = 0^m.00225.$$

2e Méthode : α_1 étant nul, comme on l'a vu dans l'analyse antérieure,

$$F_1 = 0$$

$$F = F_2 = \frac{180 \times \overline{0.50}^3}{6 \times 1 \times 10^9 \times 0.000003} \times \left(1 - \frac{0.03 - 0.02}{0.03 - 0.0035}\right) = 0.0008$$

Ce résultat doit être un peu faible, car la charge correspondant à la limite d'élasticité est déjà forte, et α_1 ne doit pas être tout à fait nul ; la flèche centrale n'est sans doute pas négligeable.

Charge.	Flèche moyenne.	Flèche calculée.
180k	$\frac{0.0022 + 0.0008}{2} = 0.0015$	0.0019

Ce dernier chiffre est celui qui a été fourni par la pièce n° 7. La pièce n° 8, bien qu'identique avec la première, a donné une flèche de 0.0033, presque double. Comme la composition est la même dans les deux cas, il est à penser que la différence provient de ce fait que, dans la seconde dalle, les barreaux ne sont pas tout à fait à une distance n de $0^m.03$ comme nous le supposons. Comme nous l'avons fait remarquer, l'entrecroisement des deux séries de barreaux, longitudinaux et transversaux, peut produire des différences appréciables, étant donné le peu d'épaisseur de la plaque elle-même.

La valeur de r resterait donc à peu près égale à 20, plutôt un peu plus élevée.

6° *Dalle n° 17.* — La limite d'élasticité se manifestait à 320^k. Avec $r = 20$, on sait, d'après l'analyse déja faite, que α_1 est 0.07 environ sous la charge de 320^k ; toutefois ce chiffre varie un peu suivant que l'on adopte pour R_2 : 20^k ou 25^k par centimètre carré. La valeur de ε_0 est 0.0054.

1re Méthode ; tous calculs faits :

$$F_1 = 0^m.0113, \qquad F_2 = 0^m.0080, \qquad F = 0^m.0193.$$

2e Méthode :

$$\frac{bn}{r\omega} = 1.6, \qquad \theta = 0.15, \qquad \varepsilon_0 = 0.0045, \qquad K = 0.53.$$

$$F_1 = 0.53 \times \frac{320 \times \overline{1.00}^3}{0.425 \times 1 \times 10^9 \times \overline{0.03}^3} = 0^m.015.$$

Comme

$$\alpha_1 = \frac{0.030 - 0.0135}{3(0.030 - 0.0045)} = 0.22,$$

$$F_2 = \frac{320 \times \overline{1.00}^3 \times \overline{0.78}^2}{6 \times 1 \times 10^9 \times 0.00000313} \times \left(1 - 0.22 - \frac{0.03 - 0.02}{0.03 - 0.004}\right) = 0^m.0044,$$

$$F = 0^m.0194.$$

Nous prenons pour I, majoré par l'adjonction des barreaux, la valeur 0.00000313.

Charge.	Flèche moyenne.	Flèche observée.
320^k	$\frac{0.0193 + 0.0194}{2} = 0.01935$	0.0266

Ici le résultat est évidemment trop faible; peut-être y aurait-il lieu de modifier un peu la valeur de r. Du reste la résistance limite indiquait une valeur plutôt voisine de 25.

Il est difficile de se prononcer, car de légères variations dans la valeur de n modifient sensiblement les flèches. Ainsi, supposant que de 0.030, cette valeur descende à 0.025, la flèche F_1 de la branche supérieure devient $0^m.025$ au lieu de $0^m.015$, et F deviendrait notablement supérieur à la flèche observée.

7° *Dalles* n° 18. — La charge limite est de 120^k. On aurait ici

$$\frac{bn}{r\omega} = 3.60, \qquad \theta = 0.097, \qquad \varepsilon_0 = 0.0029, \qquad K = 0.90,$$

$$F_1 = 0.9 \times \frac{60 \times \overline{1.00}^3}{0.40 \times 1 \times 10^9 \times \overline{0.03}^3} = 0.005.$$

Avec la flèche complémentaire F_2 on serait sans doute très voisin de la flèche observée $0^m.0066$.

Sans attacher une importance trop précise à ces comparaisons basées sur des chiffres d'expérience qui ne sont pas toujours eux-mêmes d'une parfaite concordance, il paraîtra sans doute légitime de dire au moins que les flèches calculées sont comparables, comme ordre de grandeur, aux flèches observées.

COMPARAISON DES CHARGES NORMALES ET DES CHARGES LIMITES.

Il nous reste à faire une dernière comparaison, qui ne sera sans doute pas la moins importante aux yeux des constructeurs.

Dalles en ciment. — Reprenons les équations obtenues par la seconde méthode et que nous considérons comme applicables aux dalles à sections rectangulaires. On a vu que, dans ce cas, la valeur de α_1 peut être considérée comme sensiblement nulle, ce qui réduit à 4 le nombre de ces relations; nous avons vu, de plus, que si l'on se donne également $\varepsilon_0 = 0$, elles prenaient la forme simplifiée des formules pratiques (1) à (4).

On sait que, d'après cette dernière condition, la compression

maxima R_1 est le double de la tension limite R_2. Comme la résistance à la compression est généralement égale à 10 R_2, nos formules nous placent donc au $\frac{1}{5}$ environ de la rupture. Si l'on veut, par exemple, se tenir au $\frac{1}{7}$ lorsqu'on atteint la charge normale, celle-ci ne devra être que les $\frac{5}{7}$ de la charge correspondant au cas représenté par les formules.

Des quatre formules pratiques déduisons la valeur de μ, et par conséquent de la charge. Pour obtenir la charge normale, avec coefficient de sécurité de $\frac{1}{7}$, il faudra diviser par 1.4 la charge déduite des formules.

Pour un certain nombre de dalles nous connaissons la charge de rupture. Si le principe sur lequel sont basées nos équations est exact, cette limite doit être égale à 7 fois, la charge normale ainsi établie. Nous avons donc là un moyen de contrôler l'exactitude de ce principe.

Pour cette vérification, on commencera par résoudre les 4 équations par rapport à N, μ, R' et h_0; ce qui, en posant

$$M = -1 + \sqrt{1 + 1.50 \frac{bn}{r\omega}},$$

donne

$$N = R_2 r\omega \times M, \qquad R' = R_2 r \times M,$$

$$\mu = R_2 n r\omega \times M, \qquad h_0 = \frac{2r\omega}{b} \times M.$$

D'après les dimensions de la pièce et des barreaux on calcule $\frac{bn}{r\omega}$, M et l'on a la valeur de μ. Connaissant la portée, on en conclut la charge. On obtient ainsi les résultats suivants :

Charge uniforme.

Expérience de M. Meley : $2l = 1^m,25$, rupture : $4,100^k$;

$$r = 20, \quad \frac{bn}{r\omega} = 4.8, \quad \mu' = 108,8, \quad \mu = \frac{108.8}{1.4} = 77.8, \quad P' = 77.8 \times \frac{8}{1.25} = 500^k,$$

$$\text{rapport : } \frac{500}{4100} = \frac{1}{8.2}.$$

Poids unique.

Dalle n° 8. — $2l = 1^m.00$, rupture 580^k; 11 *barreaux*.

$$r = 20, \quad \frac{bn}{r\omega} = 4.10, \quad \mu' = 33, \quad \mu = \frac{33}{1.4} = 23.5, \quad P' = 23.5 \times \frac{4}{1} = 94^k$$

$$\text{rapport : } \frac{94}{580} = \frac{1}{6.1}.$$

Dalle n° 17. — $2l = 2^m.00$, rupture : 460^k; 26 *barreaux*.

$$r = 20, \quad \frac{bn}{r\omega} = 1.61, \quad \mu' = 39.1, \quad \mu = \frac{39.1}{1.4} = 28.4, \quad P' = 28.4 \times \frac{4}{2} = 56^k.8,$$

$$\text{rapport : } \frac{56.8}{460} = \frac{1}{8.1}.$$

Dalles n° 18. — $2l = 2^m.00$, rupture : 240^k; 11 *barreaux*.

$$r = 20, \quad \frac{bn}{r\omega} = 7.3, \quad \mu' = 24.3, \quad \mu = \frac{24.3}{1.4} = 17.4, \quad P' = 17.4 \times \frac{4}{2} = 34^k.8,$$

$$\text{rapport : } \frac{1}{7}.$$

Dalles n°s 5, 6. — $2l = 1^m.00$, rupture : 480^k et 580^k; 10 *barreaux*.

$$r = 20, \quad \frac{bn}{r\omega} = 3.94, \quad \mu' = 29.7, \quad \mu = \frac{29.7}{1.4} = 21.2, \quad P' = 21.2 \times \frac{4}{1} = 84^k.8,$$

$$\text{rapport : } \frac{1}{5.6} \text{ et } \frac{1}{6.8}.$$

Dalles n°s 9, 10. — $2l = 1^m.00$, rupture : 560^k; 8 *barreaux*.

$$r = 20, \quad \frac{bn}{r\omega} = 1.04, \quad \mu' = 20.4, \quad \mu = \frac{20.4}{1.4} = 14,5 \quad P' = 14.5 \times \frac{4}{1} = 58^k.0,$$

$$\text{rapport : } \frac{1}{9.7}.$$

Dalle n° 12. — $2l = 1^m.00$, rupture : 220^k; 8 *barreaux*.

$$r = 20, \quad \frac{bn}{r\omega} = 3.25, \quad \mu' = 12.4, \quad \mu = \frac{12.4}{1.4} = 8.8, \quad P' = 8.8 \times \frac{4}{1} = 35^k.2,$$

$$\text{rapport : } \frac{1}{6.2}.$$

La moyenne de ces rapports est $\frac{1}{7.2}$.

Poutres à nervures.

Pour que cette concordance s'établisse, il faut que les charges, les efforts R_1 et R' croissent à peu près proportionnellement depuis la charge normale jusqu'à la charge de rupture, C'est ce qui semble arriver pour les dalles à section rectangulaire ; mais cette proportionnalité n'existe plus pour les poutres à nervures.

Reportons-nous à l'analyse qui a été faite pour les dalles 7, 8 et figurons les résultats obtenus avec $r=20$, et $R_2=200000^k$, ce dernier chiffre correspond à une limite de compression égale à 200^k par centimètre carré. Nous avons vu également que la plus grande tension R' du métal, sous la charge extrême de 360^k, est de $30^k.7$ environ par millimètre. La limite de charge où les N, R_1 atteignent leur maximum se présentait vers 345^k.

On voit que les R' varient presque proportionnellement aux charges jusqu'à cette limite ; en joignant le point qui correspond à 345^k, au point maximum de $30^k.7$, on voit que cette ligne complémentaire est à peu près le prolongement de la première ligne.

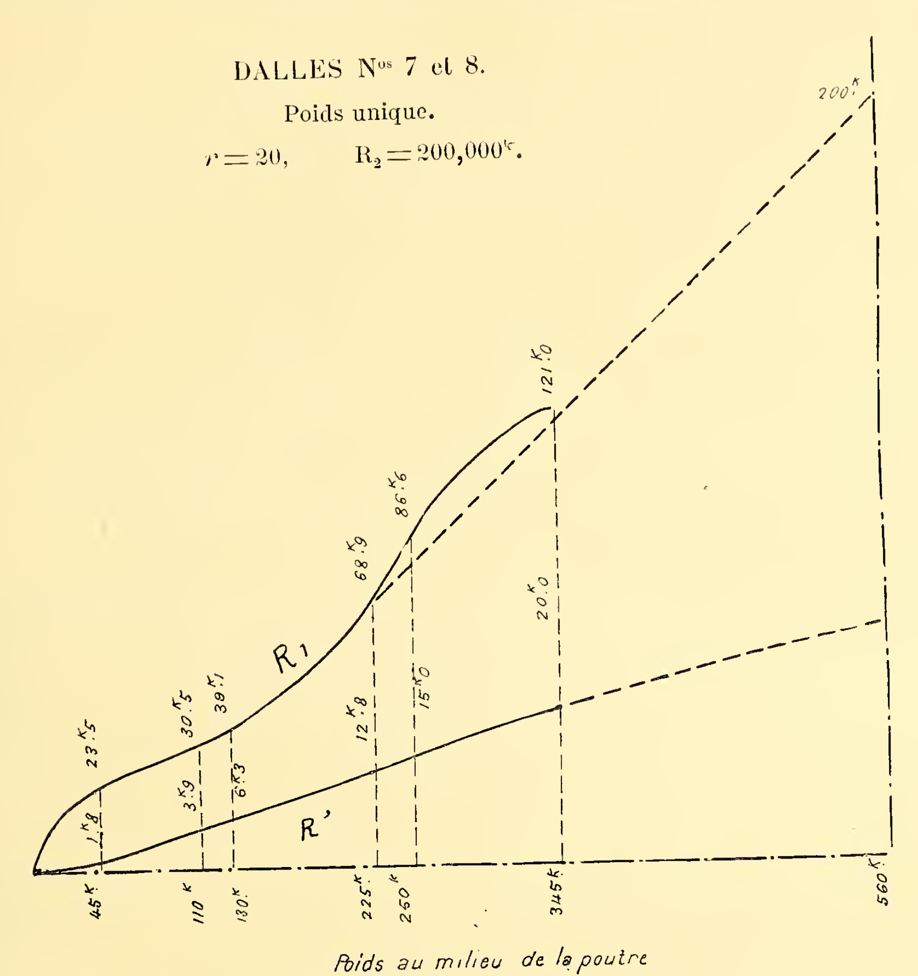
Pour les R_1, avec des inflexions plus marquées, la proportionnalité se maintient encore assez bien jusqu'à la rupture.

Mais il n'en est plus de même pour la poutre de Lausanne, si nous figurons également les résultats obtenus par l'analyse antérieure, faite avec $r=10$ et $R_2=300,000\ ^k$, ce qui suppose 300^k par centimètre carré pour la résistance à la rupture par compression. La plus grande tension R' calculée sous la charge de $25,000^k$ était de $50^k.8$. Le maximum des N, R_1 se présentait vers $16,100^k$.

Les R' conservent la proportionnalité aux charges ; mais en prolongeant les R_1 pour atteindre 300^k, on voit que la courbe s'infléchit très sensiblement.

Dans les dalles comme dans les poutres à nervure, la tension R' du métal croît proportionnellement à la charge. Cette proportionnalité se maintient assez bien pour la compression R_1 avec les dalles rectangulaires ; mais avec les poutres à nervure la compression, d'abord proportionnelle jusqu'à $\frac{1}{2}$ ou jusqu'aux $\frac{2}{3}$ de la rupture, croît ensuite plus rapidement que la charge.

Il suit de là que, pour les dalles rectangulaires, on pourra prendre pour le ciment et le fer à peu près le même coefficient de sécurité, $\frac{1}{7}$ par exemple; et que la charge de rupture sera alors égale à 7 fois la charge normale. Mais pour les poutres à nervure, si l'on maintient pour le métal ce même coefficient en prenant $\frac{42}{7}$ ou 6^k pour travail



Poids au milieu de la poutre

normal, il n'est que prudent d'adopter pour travail normal du ciment une fraction moindre que $\frac{1}{7}$ de la résistance à la limite ; il faut descendre au moins à $\frac{1}{10}$.

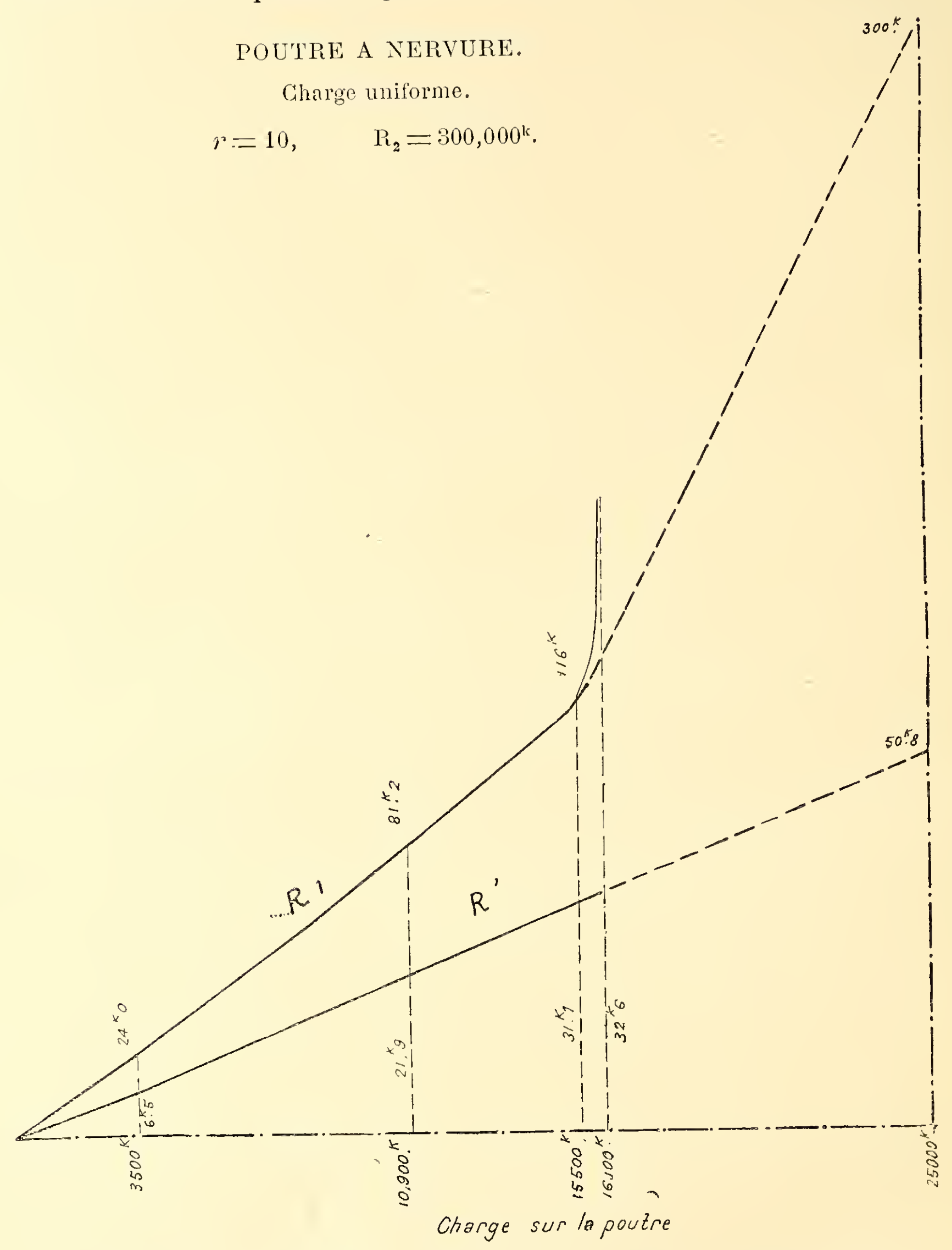
Si l'on voulait procéder, pour les poutres à nervures, à une com-

paraison analogue à celle que nous venons de faire pour les dalles, voici comment on pourrait opérer.

POUTRE A NERVURE.

Charge uniforme.

$r = 10, \qquad R_2 = 300{,}000^k.$



Les formules pratiques que nous venons d'employer ne s'adapteraient plus avec une suffisante exactitude; il faut recourir à celles de la troisième méthode. On déterminera au préalable la valeur de

$\frac{ho}{n}$; on en déduira les valeurs de v', v'', I, s correspondant à la hauteur h_0 ; on en déduira ω et μ.

Mais la valeur de ω n'est pas ici à déterminer, elle est indiquée par la construction même; il faut donc que la section déduite des formules coïncide avec la section réelle. Ceci exige que les valeurs attribuées à R_1 et R' soient convenablement réglées d'après celle de R_2.

Poutre de Lausanne. — D'après les tableaux déjà dressés pour faire l'analyse des conditions successivès de travail, nous savons qu'il faut prendre, avec $r = 10$.

$$R_2 = 30 \times 10^4, \qquad R' = 6.5 \times 10^6, \qquad R_1 = 24 \times 10^4,$$

d'où

$$K = \frac{R'}{2rR_2} = 2.167, \qquad \frac{h_0}{n} = \frac{R_1 + R_2}{KR_2 + R_1} = 0.606, \qquad h_0 = 0.606 \times 0.24 = 0.145,$$

$$v' = 0^{m}.0458, \qquad v'' = 0.0992, \qquad s = 0.1264, \qquad I = 0.000121.$$

On en conclut :

$$\omega = \frac{R_1 v'' - R_2 v'}{R' h_0} = 0.001410,$$

chiffre qui correspond bien à la section réelle, et

$$\mu = \frac{(R_1 + R_2)I + s(n - v')(R_1 v'' - R_2 v')}{h_0} = 2200.$$

De là

$$P' = \frac{8 \times 2150}{5.26} = 3400^{k}.$$

La rupture se produit sous une charge extrême de 28,000^k environ, compris le poids de la poutre. Le rapport est $\frac{1}{8.0}$.

Pour R_1 le rapport est $\frac{24}{300} = \frac{1}{12.5}$, le travail R_1 correspondant à la charge de 3,400^k étant de 24^k environ.

Pour R' le rapport est $\frac{6.5}{42}$ ou $\frac{1}{6.4}$. Le rapport trouvé $\frac{1}{8.0}$ est ici une sorte de moyenne intermédiaire entre les deux coefficients de sécurité du ciment et du fer.

Expérience de M. de Mollins. — Cette seconde poutre n'a qu'une très petite largeur d'aile horizontale : $0^m.29$ au lieu de $1^m.50$, largeur de la précédente.

N'ayant pas procédé d'avance à l'analyse détaillée que nous avons faite pour la poutre de Lausanne, nous ne savons pas exactement quelles sont les valeurs de R_1 et R' qu'il convient d'adopter, et ne pouvons établir qu'une estimation approximative.

Admettons par exemple les données suivantes :

$$R_2 = 20 \times 10^4, \qquad R' = 5.0 \times 10^6, \qquad R_1 = 20 \times 10^4,$$

avec $r = 10$, puisque tel est le rapport qui parait s'adapter à ce cas. On en conclut :

$$K = 2.50, \qquad \frac{h_0}{n} = 0.571, \qquad h_0 = 0.1600,$$

$$v' = 0^m.0646, \qquad v'' = 0^m.0954, \qquad s = 0.0355, \qquad I = 0.000060.$$

De là

$$\omega = 273,$$

pour 283 valeur réelle de la section du barreau ; les données ci-dessus sont donc à peu près dans la proportion voulue.

On en déduit

$$\mu = 492, \qquad P' = \frac{492 \times 8}{3.00} = 1312^k.$$

La rupture s'étant produite à $8{,}740^k$, le rapport est ici $\frac{1}{6.7}$. Pour le métal le rapport de sécurité admis était $\frac{5}{42}$ ou $\frac{1}{8.4}$; pour le ciment $\frac{1}{10}$.

EFFORTS TRANCHANTS ET DE GLISSEMENT LONGITUDINAL.

Les constructeurs ont généralement soin, pour les poutres à nervures de relier les fers placés au bas de la nervure avec les fers noyés dans le hourdis, au moyen d'étriers ou de ligatures placés de distance en distance ; pour les simples dalles même ils prennent sou-

vent la précaution d'ajouter quelques-unes de ces pièces, embrassant les barreaux placés dans le bas et allant se noyer dans la partie supérieure du hourdis. Ces accessoires, qui ont pour fonction de protéger la pièce contre les efforts tranchants ou de cisaillement, sont-ils indispensables, et quelles doivent être leurs proportions?

On sait que le travail, par unité de surface, est le même pour l'effort transversal ou tranchant et pour celui de glissement longitudinal; il est exprimé par

$$T = \frac{\Sigma P}{BI} \times \omega G,$$

ou ΣP est la somme algébrique des forces verticales prises d'un même côté de la section considérée ;

B la largeur au point de la section considérée;

ω la surface de la section, comptée depuis l'un des bords, supérieur ou inférieur, jusqu'au point considéré;

G la distance du centre de gravité de cette surface jusqu'à l'axe neutre.

1° *Dalles ou hourdis.* — Prenons comme exemple les dalles n°s 7, 8, dont la rupture se produit à 520^k et 580^k; moyenne: 560^k. La charge considérée comme normale sera par exemple $\frac{560}{7} = 80^k$. On a alors $\Sigma P = \frac{80}{2} = 40^k$.

Les données sont, pour une largeur de $0^m.445$ et une épaisseur de $0^m.04$:

$$I = 0.0000023, \qquad \omega = 0\ 0089, \qquad G = 0\ 01,$$

et T devient

$$T = \frac{40 \times 0.0089 \times 0.01}{0.445 \times 0.0000023} = 3560^k,$$

soit $0^k.36$ par centimètre carré. Encore ce chiffre est-il exagéré en réalité, car nous aurions dû majorer la valeur de I par suite de l'intervention du métal. La résistance au cisaillement doit être comparable à la résistance de tension, peut-être un peu plus faible cependant. Le taux normal de ce genre de travail devrait être ici $\frac{20}{7}$, prenons

même $\frac{20}{10}$ et par conséquent $2^k.0$ par centimètre carré. Cette pièce n'a donc pas besoin d'accessoires propres à augmenter sa résistance au cisaillement.

Ce fait est-il général; subsisterait-il avec des dalles de composition ordinaire ? Celles-ci, en effet, comme toute la série des dalles de M. Cottancin, préparées en vue d'expériences spéciales, n'ont nullement la composition ordinaire et sont beaucoup plus chargées de métal.

Appelons e l'épaisseur de la dalle, 2P la charge totale. On aura, avec largeur b :

$$\omega = \frac{be}{2}, \qquad G = \frac{e}{4}, \qquad I = \frac{be^3}{12}, \qquad T = \frac{3P}{2be}.$$

La hauteur n est déterminée par les formules établies et sera, par exemple, $0.0042\sqrt{\frac{\mu}{b}}$; l'épaisseur totale e, un peu plus grande, sera $0.0050\sqrt{\frac{\mu}{b}} = 0.005\sqrt{\frac{2PL}{8b}}$, si L est la portée totale. On en conclut

$$T = \frac{600}{b}\sqrt{\frac{P}{L}} = 600\sqrt{\frac{p}{2}}.$$

en appelant p la charge par unité de surface, et prenant pour b l'unité de largeur.

Nous aurions dû majorer I, d'un tiers ou même de moitié, par suite de l'intervention des barreaux en fer. La véritable valeur de T est donc au plus $300\sqrt{p}$.

La charge d'un plancher ordinaire est de 300^k à 400^k; le travail de cisaillement est alors de $6,000^k$, ou $0^k.6$ par centimètre carré.

Pour des planchers très chargés, ce chiffre atteindra $1,000^k$ par exemple; le travail de cisaillement ne passera pas $1^k.0$. On voit que, à moins de charges exceptionnelles, les étriers et ligatures ne sont pas rigoureusement indispensables. Ils sont cependant utiles pour remédier aux effets du fendillement, qui est toujours à redouter pour le ciment.

2° *Poutres à nervure*. — Le résultat est tout différent pour les

poutres à nervures. Prenons comme exemple la poutre de Lausanne dont les éléments sont connus :

$$I = 0.00073, \qquad v' = 0.0717, \qquad \omega = 1.50 \times 0.0717 = 0.1075,$$
$$G = \frac{0.0717}{2} = 0.0358.$$

La rupture se produit vers 28,000^k de poids total; prenons pour charge normale $\frac{28,000}{7} = 4,000^k$; d'où $\Sigma P = 2,000^k$.

Le travail sur l'axe neutre devient

$$T = \frac{2000 \times 0.1075 \times 0.0358}{1.50 \times 0.00073} = 7000^k,$$

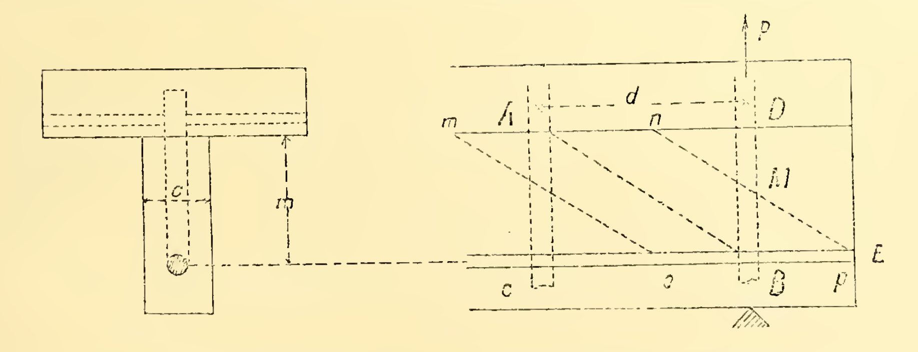
ou $0^k.70$ par centimètre carré. Ce chiffre, réduit encore par la majoration de I, serait tout à fait acceptable; mais il ne représente pas le travail maximum. En effet, calculons le travail à la jonction du hourdis et de la nervure, ce qui correspond à

$$h = 0^m.08, \qquad \omega = 1.50 \times 0.08 = 0.12, \qquad G = 0^m.032,$$
$$T = \frac{2000 \times 0.012 \times 0.032}{0.16 \times 0.0011} = 4^k.4.$$

par centimètre, car la largeur n'est plus celle du hourdis, mais celle de la nervure ou $0^m.16$. Nous avons ici pris la valeur de I majorée.

Pour ces sortes de poutres l'intervention des étriers est donc tout à fait nécessaire.

Si l'on veut se rendre compte, d'une manière approximative mais



simple, du rôle joué par ces liens, voici comment on peut procéder. Imaginons une barre de treillis allant de A en B; on voit qu'elle sera comprimée; le lien AC subit une tension, de même que le barreau CB, tandis que le hourdis AD est comprimé. Remplaçons la barre de

treillis par le prisme de ciment *mnop* qui, n'étant que comprimé, est tout à fait apte à jouer le même rôle.

1° Le long de *mn* ce prisme exerce sur le hourdis un effort de compression vertical; il y a de plus un effort de glissement horizontal. De ces deux genres d'efforts résulte un travail mixte qui tient de la compression et du cisaillement; il est naturellement moins défavorable que le cisaillement seul. En effet, si le cisaillement tend à écarter les molécules des deux surfaces en contact, produisant un effet tout semblable à ceux de la tension, par contre la compression tend à rapprocher ces mêmes molécules.

Pour tenir au moins partiellement compte de cette intervention de la compression, faisons intervenir le frottement qui en résulte et vient soulager la tendance au glissement.

La pression verticale est égale à P, réaction de l'appui, tant que nous sommes au voisinage de celui-ci. L'effort horizontal de glissement est $\frac{Pd}{m}$. Le coefficient de frottement est 0.75 environ. On aura donc

$$R_2 cd = P \times \frac{4d - 3m}{4m},$$

si R_2 est le travail de résistance adopté.

La poutre de Lausanne avait 28 étriers sur une longueur de $5^m.26$, avec écartement moyen de $\frac{5.26}{28}$ ou $0^m.18$. Ces étriers devaient être plus rapprochés aux extrémités; prenons cependant une largeur $d = 0^m.20$ pour plus de sécurité, puisque le plus grand écartement est une condition défavorable au calcul.

La résistance maxima à la tension est ici de 300^k par centimètre, dont le $\frac{1}{7}$ est $4^k.3$. Adoptons le chiffre de 3^k, la résistance au cisaillement pouvant être plus faible que celle de tension. On aura

$$c = \frac{P}{R_2 d} \times \frac{4d - 3m}{4m} = \frac{2000^k}{3 \times 10^4 \times 0.20} \times \frac{0.80 - 0.48}{4 \times 0.16} = 0^m.16,$$

Car la hauteur $h = 0^m.24 - 0^m.08 = 0^m.16$. La largeur de $0^m.16$, qui est celle adoptée, est donc suffisante pour cette poutre.

2° Suivant *op* le prisme tend à glisser le long des barreaux, en même temps qu'il est maintenu par la compression P. On peut cer-

tainement admettre que l'adhérence du fer et du ciment est égale à celle du ciment sur ciment. Nous sommes donc au moins dans des conditions équivalentes à celles que nous avons admises pour le contact mn.

Il s'ensuit que la surface du contact le long des barreaux op sera suffisante si elle est égale à la surface $c \times d$ le long de mn ; d'où l'on conclut :

$$n\pi\delta = c, \tag{2}$$

si n est le nombre des barreaux et δ leur diamètre.

Sur la poutre de Lausanne, on a en réalité

$$n = 2, \qquad \delta = 0^{m}.030, \qquad n\pi\delta = 0^{m}.188,$$

tandis que $c = 0^{m}.16$ était suffisant. On est donc suffisamment en garde contre tout décollement aux extrémités.

3° Les fers verticaux, étriers ou ligatures, sont soumis à une tension P. Si R′ est le travail accepté pour le métal, s la section de chaque fer, il faut

$$2nsR' = P, \tag{3}$$

Dans la poutre de Lausanne, s est 0.040×0.003, d'où

$$R' = \frac{2000}{2 \times 2 \times 0.04 \times 0.003} = 4^{k}.1.$$

La section de ces étriers est largement suffisante.

Ces trois équations permettront de régler le nombre et la section des liens nécessaires, au voisinage des appuis. Ces proportions peuvent diminuer des extrémités vers le centre, exactement comme pour les poutres à treillis. Même dans la région centrale leur intervention reste utile, comme nous l'avons dit, à cause de la facilité de fendillement ; pour les poutres à nervure, elle l'est d'autant plus que, généralement, la nervure et le hourdis sont fabriqués l'un après l'autre et que la reprise du ciment, le long de la face de raccord, n'est pas toujours d'une adhérence parfaite.

La largeur minima c de la nervure est fixée par la relation (1) ; on arrête définitivement cette largeur en ayant soin de la prendre suffisante pour que les barreaux soient convenablement enveloppés du ciment.

On remarquera la nécessité de prolonger la poutre, au delà de

l'appui, de B en E, c'est-à-dire d'une longueur au moins égale à la moitié de l'écartement d; sans quoi il se pourrait que la longueur o B fût insuffisante pour s'opposer au glissement.

On pourrait dire, il est vrai, que, à défaut du prolongement BE, le prisme vient buter contre l'étrier sur la hauteur BM; mais cet étrier ne peut fournir un point d'appui que s'il est lui-même maintenu solidement en B; ce qui ne serait pas le cas, si BE était supprimé.

REMARQUE.

On pourrait être tenté d'appliquer ce mode de calcul, séduisant par sa simplicité, à la détermination des éléments de la poutre à nervure; celle-ci étant alors assimilée à une poutre en treillis ordinaire, composée de deux semelles horizontales qui seraient le hourdis et les barreaux de fer, d'un montant vertical qui serait l'étrier, et d'une barre oblique de treillis constituée, comme nous venons de dire, par un prisme de ciment.

Mais si ce genre de calcul est suffisant pour l'étrier, il ne l'est pas pour la poutre. On l'applique, avec une approximation satisfaisante, aux poutres métalliques, dans lesquelles la semelle n'a qu'une très faible hauteur par rapport à la hauteur totale de la poutre; par suite, on peut, sans grand inconvénient, admettre que le point d'attache des diverses pièces sur la semelle mince est à peu près à mi-hauteur de celle-ci. De cette manière, la pression se répartit uniformément dans la hauteur de la semelle; à quoi contribuent d'ailleurs la disposition des rivets et le mode de clouage.

Ici il n'en est plus de même. Les hourdis ont une épaisseur qui n'est pas négligeable; en quel point de cette épaisseur viennent se composer les diverses forces intervenantes; ou en d'autres termes, en quel point passe le polygone des pressions ou résultantes?

Que l'on place ce point un peu plus ou un peu moins haut, le résultat influe peu, il est vrai, sur la tension des barreaux et sur leur section. Le moment de cette tension, c'est-à-dire le produit de cette tension par la distance du barreau au point en question, doit toujours être égal au moment des forces extérieures; une légère variation du bras de levier n'amènera donc qu'une légère variation de la tension, et, par conséquent, du diamètre nécessaire.

Mais, pour le hourdis, ce déplacement a au contraire une influence

considérable sur le travail de compression. Place-t-on le point de passage à $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ de l'épaisseur du hourdis, la compression maxima varie du simple, au double, au triple. C'est pourquoi il est très important de fixer le plus exactement possible la valeur de ε_0 qui détermine ce point de passage; ou encore de déterminer à l'avance les proportions de manière que ε_0 prenne une valeur connue.

Une hypothèse arbitraire à ce sujet laisse complètement dans l'inconnu le véritable travail du ciment à la compression. On a bien fixé, par là, d'une manière approximative, le travail des barreaux en fer; mais, en réalité, on ne sait pas du tout comment se comporte le hourdis en béton.

Certains constructeurs admettent que, dans l'axe, le point de passage est à mi-hauteur de l'épaisseur du hourdis, dont le travail est alors $\frac{N}{s}$, si N est la tension totale des barreaux, et s la section du hourdis.

En réalité on a vu que la compression maxima est

$$R_1 = \frac{R_2 v'}{v''} + \frac{N h_0}{s v''},$$

expression qui donne des résultats très différents. Ce qui est plus vrai, c'est que le point de passage est généralement voisin du sommet, car on a vu que ε_0 est d'ordinaire très petit sous la charge normale; en outre la section qui travaille comprend non seulement le hourdis, mais aussi une partie de la nervure; ce qui donne une tout autre répartition du travail.

Ainsi, pour la poutre de Lausanne, sous la charge moyenne de 3,500^k, la valeur de $\frac{N}{s}$, calculée par cette méthode approximative, serait $\frac{9250}{1.50 \times 0.08}$, en $7^k.7$; telle serait la compression sur le hourdis. Or elle est réellement, comme on l'a vu, égale à 24^k par centimètre carré.

On voit donc qu'il n'est guère possible de s'en tenir, en pareille matière, à des à peu près qui risquent fort de rester loin de la vérité.

RÉSUMÉ

FORMULES PRATIQUES.

1° *Dalles et hourdis.* — Les calculs déduits de la considération des fortes charges, avec limite de désagrégation déterminée au moyen de la branche supérieure, nous ont donné pour les expressions de n, distance de l'axe des barreaux à la face supérieure, et de ω section totale des fers :

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{b}} \times \sqrt{\frac{2}{3\theta(1-\theta)R_1}}$$

$$\omega = \frac{1}{R'}\sqrt{b\mu} \times \sqrt{\frac{3\theta R_1}{2(1-\theta)}}.$$

R_1 étant le travail de compression adopté pour le béton ou le mortier de ciment, R' le travail de tension du fer; le rapport θ se déduit, au moyen des tableaux, des valeurs adoptées pour les diverses résistances.

Les faibles charges et la limite prise sur la branche inférieure nous ont conduits à des formules que l'on peut écrire, en posant

$$M = \frac{2rR_2 + R'}{3r},$$

de la manière suivante :

$$n = \frac{1}{R_2}\sqrt{\frac{\mu}{b}} \times \sqrt{2M}$$

$$\omega = \frac{R_2}{R'}\sqrt{b\mu} \times \sqrt{\frac{1}{2M}},$$

avec

$$h_0 = \sqrt{\frac{\mu}{b}} \times \sqrt{\frac{2}{M}},$$

h_0 étant la hauteur utile de ciment non désagrégé, sur l'axe.

Dans ces formules R_1 est nécessairement égal à $2R_2$; si l'on veut admettre un coefficient de sécurité égal à $\frac{1}{K}$, la valeur de R_1 devrait être $\frac{10\,R_2}{K}$, la résistance limite de compression étant généralement égale à 10 fois la résistance de tension pour le ciment. Il faut donc réduire R' et μ dans le rapport de ces deux quantités ; ce qui conduit à remplacer μ par $\frac{K\mu}{5}$ et R' par $\frac{KR'}{5}$.

De cette façon les formules se modifient comme suit :

$$M = \frac{2rR_2 + 8.4 \times 10^6}{3r},$$

Si la limite de R' est 42^k par millimètre carré :

$$n = \frac{1}{R_2}\sqrt{\frac{K\mu}{5b}} \times \sqrt{2M},$$

$$\omega = \frac{R_2}{8.4}\sqrt{\frac{Kb\mu}{5}} \times \sqrt{\frac{1}{2M}}.$$

On a vu que les premières expressions donnent généralement des résultats un peu exagérés, puisqu'on néglige toute résistance du ciment à la tension ; les secondes, au contraire, supposent que la désagrégation centrale n'a qu'une étendue sensiblement nulle, dans le sens transversal ; ce qui ne peut être rigoureusement vrai à moins que le chargement ne soit progressivement fait, par degrés absolument insensibles.

Il est donc naturel d'admettre définitivement, comme voisines de la réalité, des moyennes entre les résultats fournis par ces deux séries de formules.

Ordinairement, pour des bétons âgés d'un mois et de composition normale, on peut admettre, pour le rapport r des coefficients d'élas-

ticité, une valeur voisine de 20; et pour la résistance limite à la tension R_2 une valeur de $20^k \times 10^4$; pour les bétons les plus résistants, une valeur de $30^k \times 10^k$. On a ainsi :

$$R_2 = 200000^k.$$

Coefficient de sécurité : $\frac{1}{7}$.

Branche supérieure.	Branche inférieure.	Moyennes.
$n = 0.00521\sqrt{\frac{\mu}{b}}$ $\omega = 35.0\sqrt{b\mu}$	$n = 0.00438\sqrt{\frac{\mu}{b}}$ $\omega = 37.9\sqrt{b\mu}$	$n = 0.0048\sqrt{\frac{\mu}{b}}$ $\omega = 36.5\sqrt{b\mu}$

Coefficient de sécurité : $\frac{1}{5}$.

Branche supérieure.	Branche inférieure.	Moyennes.
$n = 0.00452\sqrt{\frac{\mu}{b}}$ $\omega = 30.5\sqrt{b\mu}$	$n = 0.00364\sqrt{\frac{\mu}{b}}$ $\omega = 34.2\sqrt{b\mu}$	$n = 0.0041\sqrt{\frac{\mu}{b}}$ $\omega = 32.4\sqrt{b\mu}$

$$R_2 = 300000^k.$$

Coefficient de sécurité : $\frac{1}{7}$.

Branche supérieure.	Branche inférieure.	Moyennes.
$n = 0.00360\sqrt{\frac{\mu}{b}}$ $\omega = 54.0\sqrt{b\mu}$	$n = 0.00325\sqrt{\frac{\mu}{b}}$ $\omega = 51.4\sqrt{b\mu}$	$n = 0.00342\sqrt{\frac{\mu}{b}}$ $\omega = 52.7\sqrt{b\mu}$

Coefficient de sécurité : $\frac{1}{5}$.

Branche supérieure.	Branche inférieure.	Moyennes.
$n = 0.00312\sqrt{\frac{\mu}{b}}$ $\omega = 46.7\sqrt{b\mu}$	$n = 0.00270\sqrt{\frac{\mu}{b}}$ $\omega = 46.1\sqrt{b\mu}$	$n = 0.00291\sqrt{\frac{\mu}{b}}$ $\omega = 46.4\sqrt{b\mu}$

Ces formules sont surtout applicables aux dalles et hourdis à section rectangulaire.

2° *Pour les poutres armées de nervures* saillantes, les écartements des nervures ne sont généralement pas réglés, d'après la portée, de manière que ces formules trouvent une application suffisamment exacte. On déterminera l'épaisseur des hourdis d'après les relations qui précèdent; mais pour la détermination des proportions à donner, aux nervures et à leurs barreaux, il convient de recourir à la troisième méthode.

On se fixe à l'avance la tension R_2 de rupture du mortier en béton, d'après son âge et sa composition; le travail R_1 de compression du ciment, R' de tension du fer, qu'on ne veut pas dépasser.

La hauteur utile h_0 de ciment non désagrégée est tout de suite connue par la relation :

$$\frac{h_0}{n} = \frac{(R_1 + R_2)}{R' + rR_1}.$$

Connaissant cette hauteur h_0, d'après la distance n des barreaux à la face supérieure, telle qu'on se l'est fixée, on connaît la section, en forme de T, qui subsiste, et dont on calcule les v', v'', I, s. On les reporte dans les expressions

$$\varepsilon_0 = v' - \frac{1}{s} \times \frac{(R_1 + R_2)I}{R_1 v'' - R_2 v'},$$

$$\omega = s \times \frac{R_1 v'' - R_2 v'}{R' h_0},$$

$$\mu = \frac{(R_1 + R_2)I + s(n - v')(R_1 v'' - R_2 v')}{h_0};$$

qui déterminent la distance, comptée à partir de la face supérieure, à laquelle passe le polygone des résultantes ou pressions; la section totale des fers de la nervure; le moment des forces extérieures au centre de la pièce. De la valeur de ce moment, on déduit la charge que peut porter la pièce.

TABLEAUX GRAPHIQUES.

Ces derniers calculs sont d'un emploi laborieux, en raison de la forme compliquée de ces diverses expressions. Aussi avons-nous résumé, sous forme de tableaux graphiques, les résultats des cal-

culs, en adoptant diverses données. En raison des remarques faites antérieurement sur l'accroissement plus rapide de R_1, et sur la proportionnalité de R' aux charges, nous prenons pour R' le taux normal de 8^k ou de 6^k, soit le $\frac{1}{5}$ environ ou le $\frac{1}{7}$ de la rupture ; mais pour R_1 nous réduisons à une moindre fraction.

Rappelons que b est la largeur, a l'épaisseur du hourdis ; c la largeur de la nervure, n la distance de l'axe des barreaux de la nervure à la face supérieure du hourdis.

Pour montrer l'usage de ces tableaux, donnons quelques exemples d'application.

Première application — On se donne

$$R_1 = 20^k \times 10^4, \qquad R' = 8^k \times 10^6, \qquad R_2 = 20^k \times 10^4,$$

$$b = 1^m.50, \quad a = 0^m.08; \quad \text{d'où} \quad ba = 0.12, \quad ba^2 \times 10^5 = 960; \quad c = 0^m.16.$$

$$\text{d'où} \quad \delta = 0.0107.$$

De plus la charge est de 3500^k, la portée de $5^m.26$, comme pour la poutre de Lausanne; d'où $\mu = 3500 \times \frac{5.26}{8} = 2300$, et $\frac{\mu}{ba^2 \times 10^5} = 2.40.$

On demande quelle doit être la section ω des fers, et la distance n ?

Employons le premier tableau, en adoptant les résistances qui y sont indiquées. On prend 2,40 sur la colonne de gauche, on suit horizontalement jusqu'au voisinage de la courbe marquée $\delta = 0{,}10$, en s'arrêtant un peu avant celle-ci. On est ainsi à l'aplomb de la verticale qui correspond à $\frac{\omega}{ba} = 0{,}11$.

On en conclut : $\omega = 0{,}11 \times 0{,}12 = 0{,}001320$. Si l'on place deux barreaux dans la nervure, chacun aura une section de 660 millimètres carrés, et un diamètre de $0^m.029$.

On est, en même temps, au voisinage de l'oblique $\beta = 2.0$; on en conclut $n = 1{,}50 \times 2.0 \times 0.08 = 0^m.240$. La hauteur totale sera de $0^m.28$ à $0^m.29$.

Deuxième application. — Conservant les mêmes R_1, R_2, R', b, a, on se donne

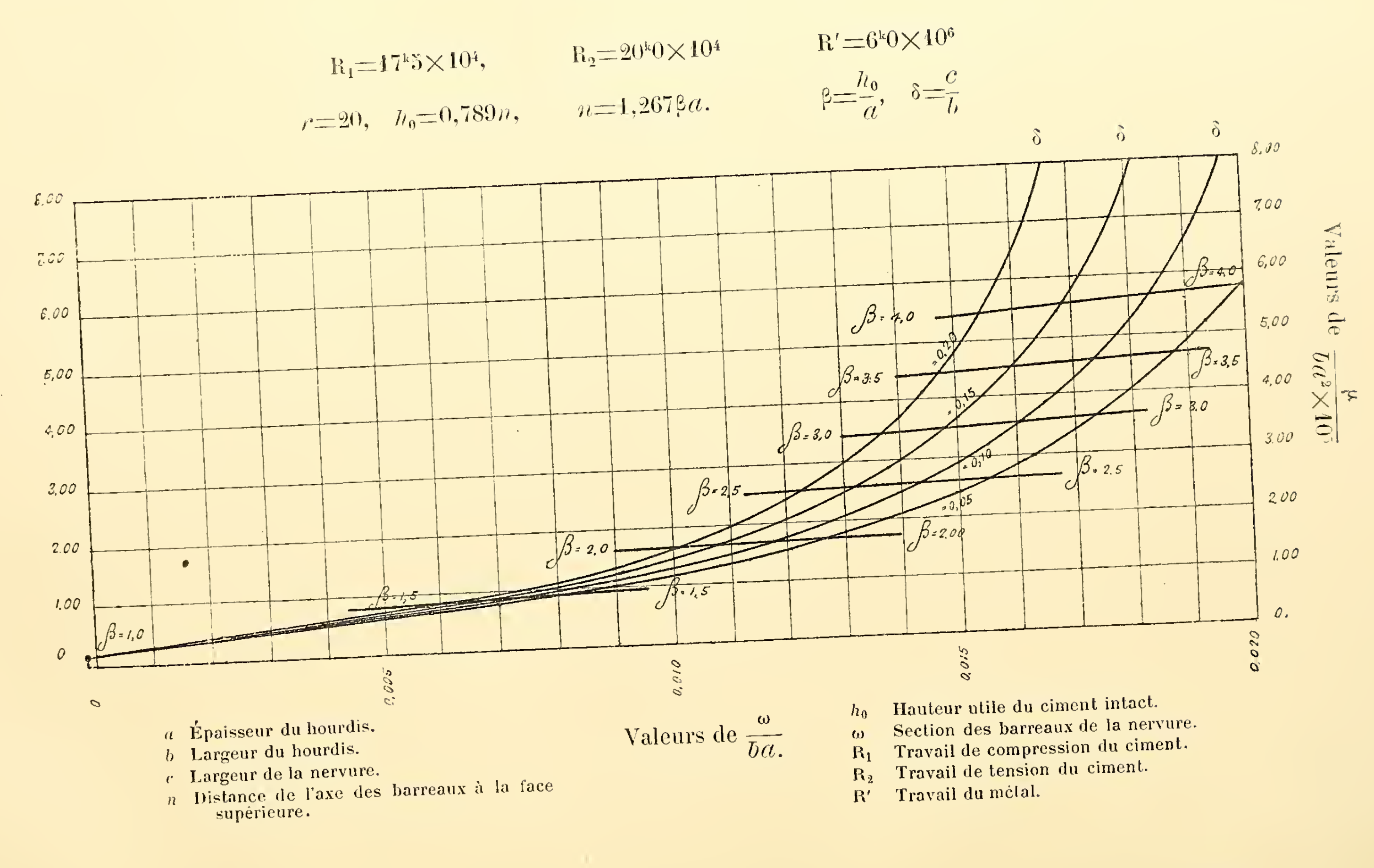
$$\omega = 0.00132, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\omega}{ba} = 0.011.$$

OF THE
UNIVERSITY of ILLINOIS

POUTRES A NERVURES EN CIMENT ARMÉ

$R_1 = 17^k 5 \times 10^4$, $R_2 = 20^k 0 \times 10^4$ $R' = 6^k 0 \times 10^6$

$r = 20$, $h_0 = 0,789n$, $n = 1,267 \beta a$. $\beta = \frac{h_0}{a}$, $\delta = \frac{c}{b}$



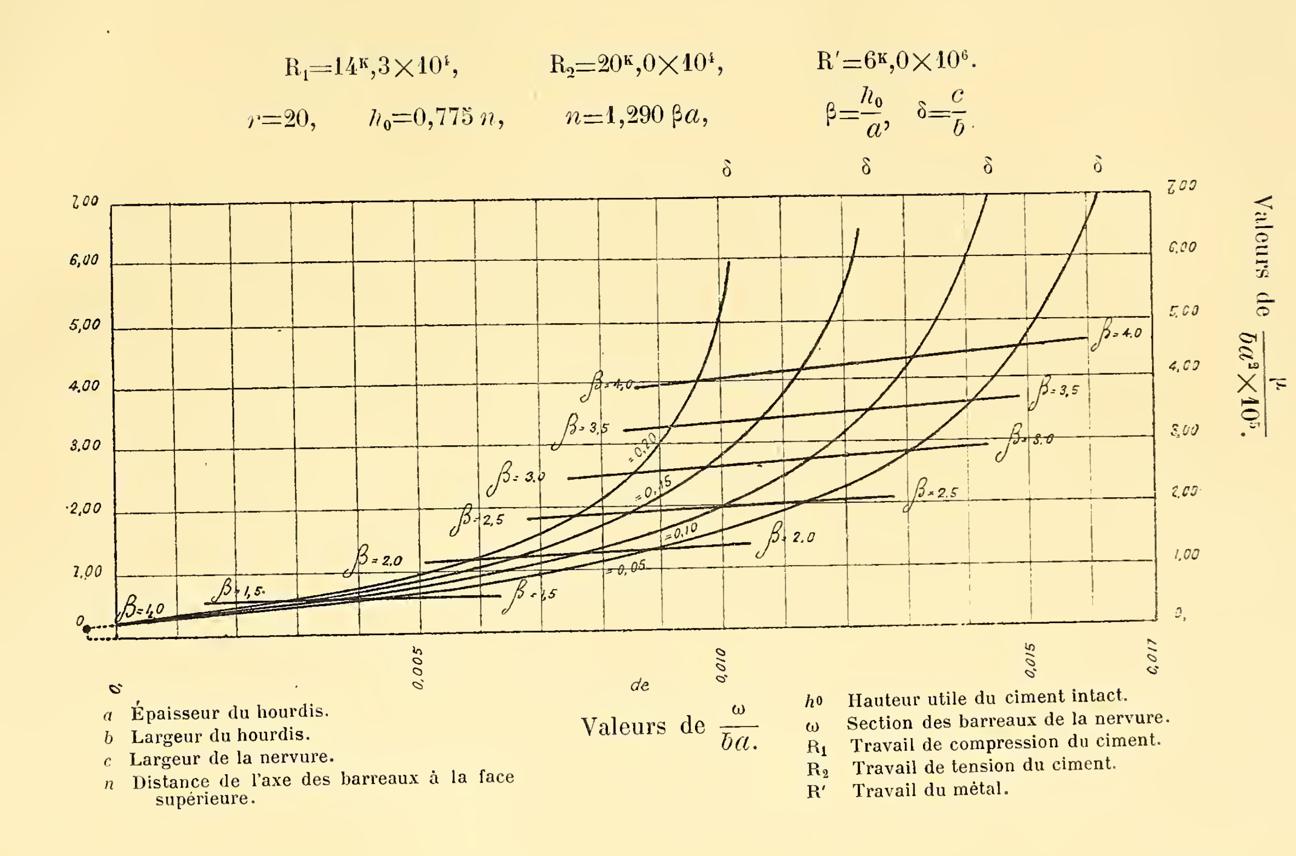
a Épaisseur du hourdis.
b Largeur du hourdis.
c Largeur de la nervure.
n Distance de l'axe des barreaux à la face supérieure.

h_0 Hauteur utile du ciment intact.
ω Section des barreaux de la nervure.
R_1 Travail de compression du ciment.
R_2 Travail de tension du ciment.
R' Travail du métal.

POUTRES A NERVURES EN CIMENT ARMÉ

$R_1 = 14^K,3 \times 10^4$, $R_2 = 20^K,0 \times 10^4$, $R' = 6^K,0 \times 10^6$.

$r = 20$, $h_0 = 0,775\, n$, $n = 1,290\, \beta a$, $\beta = \frac{h_0}{a}$, $\delta = \frac{c}{b}$.



a Épaisseur du hourdis.
b Largeur du hourdis.
c Largeur de la nervure.
n Distance de l'axe des barreaux à la face supérieure.

h_0 Hauteur utile du ciment intact.
ω Section des barreaux de la nervure.
R_1 Travail de compression du ciment.
R_2 Travail de tension du ciment.
R' Travail du métal.

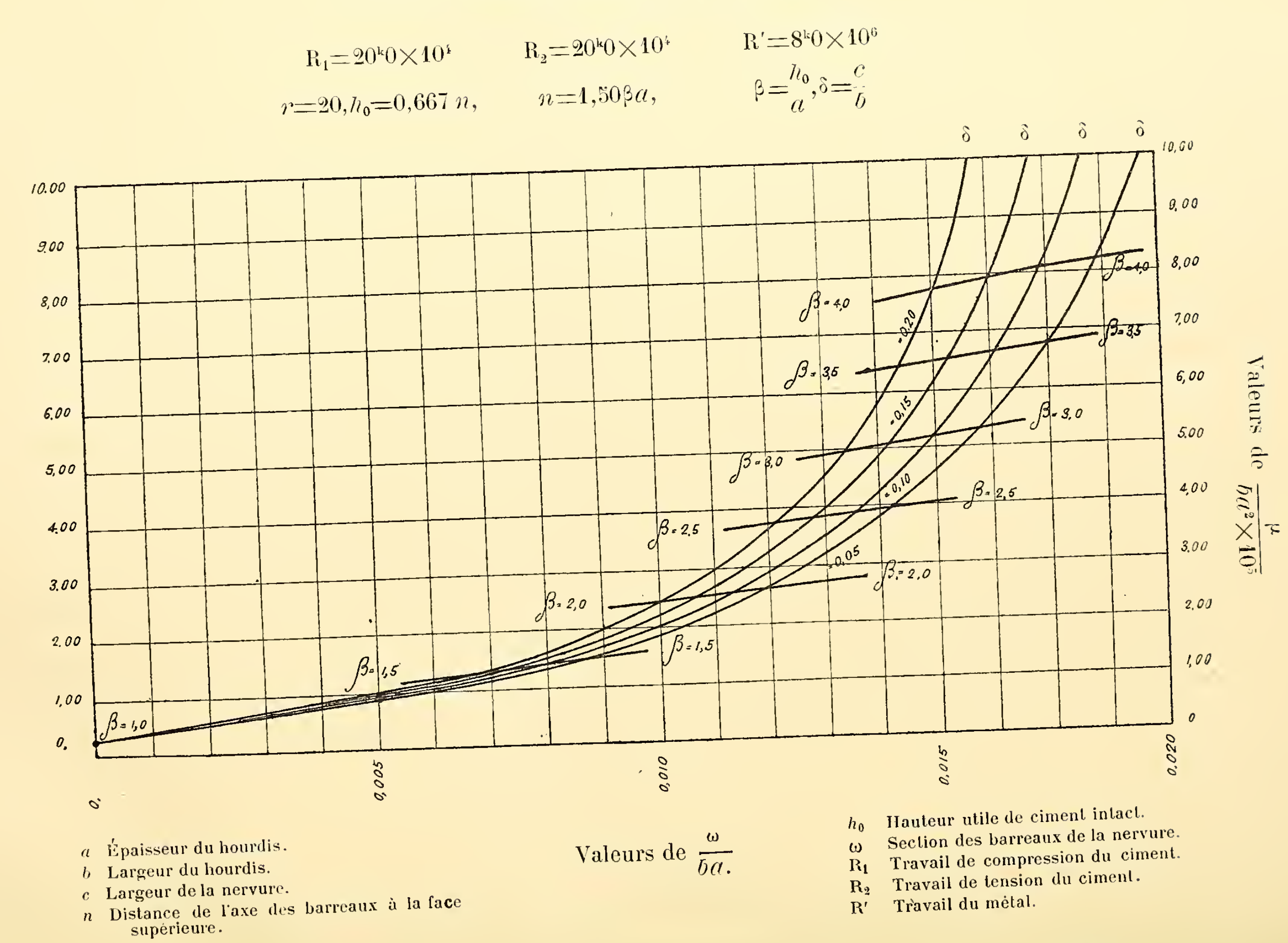
UNIVERSITY of ILLINOIS.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY of ILLINOIS

POUTRES A NERVURES, EN CIMENT ARMÉ

$R_1 = 20^k 0 \times 10^4$ $\quad R_2 = 20^k 0 \times 10^4$ $\quad R' = 8^k 0 \times 10^6$

$r = 20, h_0 = 0{,}667\, n,$ $\quad n = 1{,}50 \beta a,$ $\quad \beta = \frac{h_0}{a}, \delta = \frac{c}{b}$



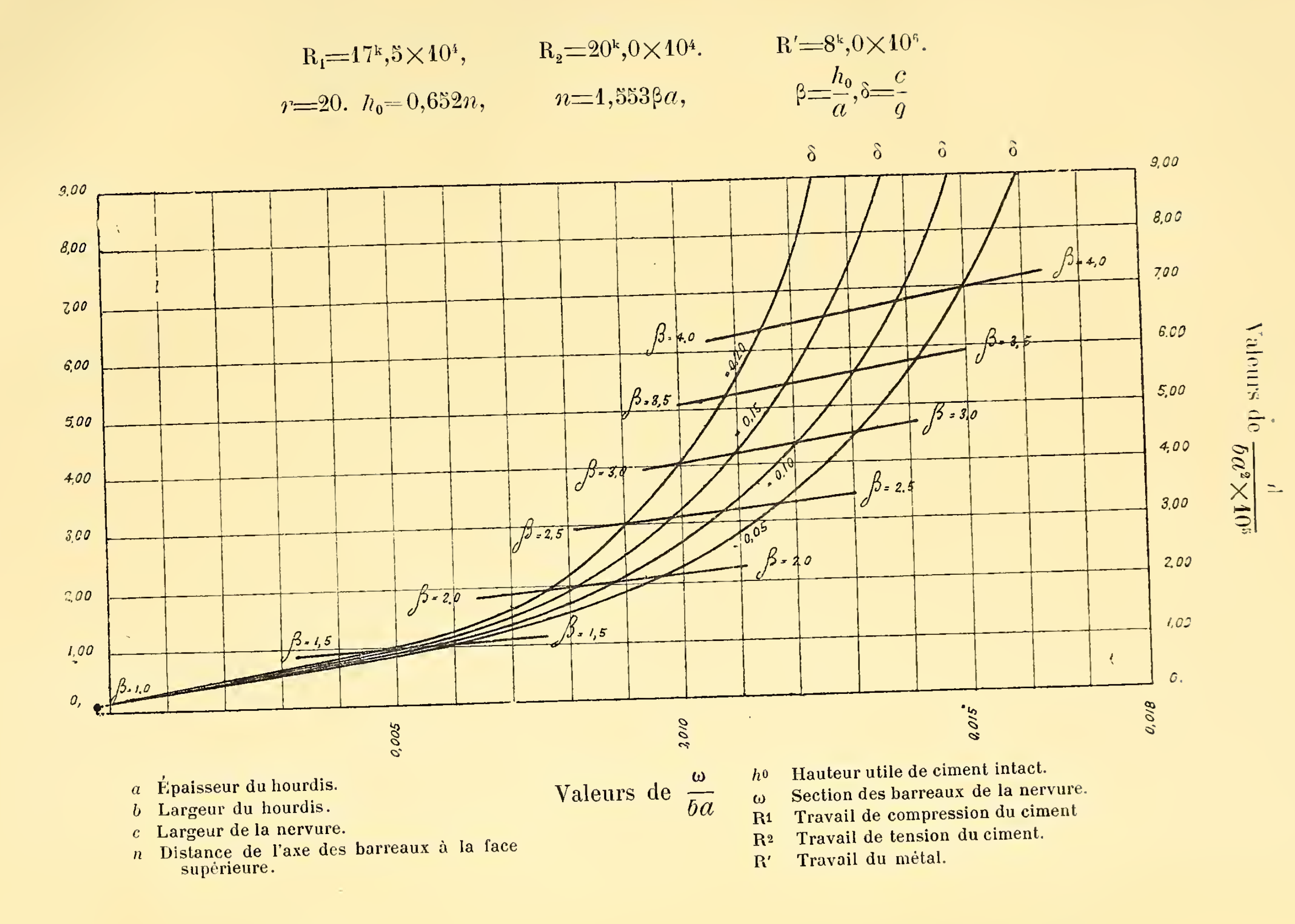
a Épaisseur du hourdis.
b Largeur du hourdis.
c Largeur de la nervure.
n Distance de l'axe des barreaux à la face supérieure.

h_0 Hauteur utile de ciment intact.
ω Section des barreaux de la nervure.
R_1 Travail de compression du ciment.
R_2 Travail de tension du ciment.
R' Travail du métal.

POUTRES A NERVURES EN CIMENT ARMÉ

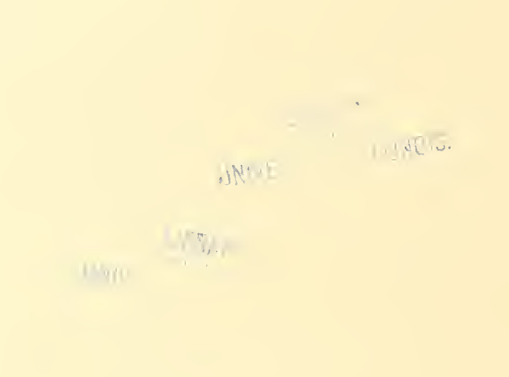
$R_1 = 17^k,5 \times 10^4$, $\quad R_2 = 20^k,0 \times 10^4$. $\quad R' = 8^k,0 \times 10^6$.

$r = 20.\ h_0 = 0,652 n$, $\quad n = 1,553 \beta a$, $\quad \beta = \frac{h_0}{a}, \delta = \frac{c}{g}$



a Épaisseur du hourdis.
b Largeur du hourdis.
c Largeur de la nervure.
n Distance de l'axe des barreaux à la face supérieure.

h_0 Hauteur utile de ciment intact.
ω Section des barreaux de la nervure.
R_1 Travail de compression du ciment
R_2 Travail de tension du ciment.
R′ Travail du métal.



et une charge de 4.000^k, d'où $\mu = 2{,}630$, et $\frac{\mu}{ba^2 \times 10^5} = 2.74$.

On demande la largeur c et la distance n?

Prenant sur la gauche 2.74 et marchant horizontalement jusqu'à la rencontre de la verticale $\frac{\omega}{ba} = 0.011$, on arrive en un point qui est presque sur la courbe $\delta = 0.15$; d'où l'on conclut : $c = 0.15 \times 1.50 = 0^m.223$.

On est, en même temps, un peu au-dessus de l'oblique $\beta = 2.0$; la valeur de n devra être légèrement plus grande que $1.50 \times 2.0 \times 0.08$, ou $0^m.24$; on prendra $0^m.25$, et la hauteur totale sera $0^m.29$ à $0^m.30$.

Troisième application. — On se donne

$$b = 1^m.50, \quad a = 0^m.08; \quad c = 0^m.16, \quad \text{d'où} \quad \delta = 0.107; \quad \omega = 0.001800,$$

$$\text{d'où} \quad \frac{\omega}{ba} = 0.0105.$$

On demande le moment μ, ou la charge que peut porter la pièce ainsi constituée, et la distance n.

Sur l'horizontale du bas on prend 0.015 et l'on remonte verticalement jusqu'à $\delta = 0.107$, un peu au-dessous de la courbe $\delta = 0.10$. Du point de rencontre on revient horizontalement lire $\frac{\mu}{ba^2 \times 10^5} = 5.3$. Comme $ba^2 \times 10^5$ est encore 960, μ est 5088.

La charge est $5088 \times \frac{8}{5.26} = 7{,}740^k$.

En même temps on est au voisinage de $\beta = 3.0$; donc il faut prendre pour n : $1.50 \times 3.0 \times 0.08 = 0^m.36$.

Bien entendu, en pratique, avec une nervure aussi saillante il conviendrait d'adopter une valeur de c un peu plus grande. Si l'on modifiait la donnée en prenant $c = 0.20$, d'où $\delta = 0.133$, on trouverait que μ devient $5.5 \times 960 = 5{,}280$, et la charge serait de 8,000^k.

β augmenterait et serait 3.15 par exemple; d'où

$$n = 1.5 \times 3.15 \times 0.08 = 0^m.38.$$

La hauteur totale serait de $0^m.42$ à $0^m.43$.

Remarque. — Les lignes figurant les valeurs de β sont des obliques sensiblement droites et peu inclinées sur l'horizontale. Par consé-

quent, pour chaque valeur de $\frac{\mu}{ba^2 \times 10^5}$, ou de la charge, il y a une valeur de β dont on ne doit guère s'écarter; cela veut dire qu'à chaque charge correspond une hauteur totale de poutre qui ne peut varier que dans des limites très peu étendues.

Par contre, on peut faire varier δ; si l'on prend un δ plus grand, ω diminue. Cela veut dire que, si l'on donne plus de largeur à la nervure de ciment, on pourra réduire un peu la section des barreaux en fer; ou inversement. On peut ainsi, dans une certaine mesure, remplacer du métal par du ciment.

Mais, tout en faisant jouer ainsi les épaisseurs horizontales de la nervure et le diamètre des barreaux, ceux-ci doivent rester sensiblement à la même distance n de la face supérieure.

ÉPAISSEUR DES TUYAUX EN CIMENT ARMÉ.

On emploie assez fréquemment aujourd'hui des tuyaux de conduite et des réservoirs constitués par une armature en fils de fer ou barreaux métalliques, placés longitudinalement et transversalement, noyée ensuite dans une masse de mortier ou béton de ciment.

Habituellement on se préoccupe surtout de déterminer, par un calcul sommaire, la section des fers à loger dans le ciment; pour l'épaisseur de celui-ci, les constructeurs suivent le plus souvent des règles à peu près empiriques ou tout à fait de sentiment. On peut cependant serrer la question de plus près ; nous allons essayer de fournir quelques indications plus précises.

Appelons ω' la section du ciment par mètre courant pour une paroi ;

ω'' la section de métal correspondante ;

P la pression sur une paroi, par mètre courant, qui est moitié de la pression totale sur le diamètre ;

R' le travail auquel est soumis le ciment ;

R'' le travail du métal.

On aura tout d'abord, pour exprimer que la résistance est égale à la pression, la relation

$$R'\omega' + R''\omega'' = P. \qquad (1)$$

Appelons r le rapport des coefficients d'élasticité, métal et ciment; tant que le ciment n'est pas désagrégé sous un effort de tension trop considérable, les deux matériaux prennent le même allongement, restent adhérents et solidaires; ce qui exige que

$$R'' = rR'. \qquad (2)$$

En général pour des mortiers ou bétons de ciment fabriqués avec soin et âgés d'un mois au moins avant la mise en charge, on peut admettre que r est égal à 20 environ.

Pour que le ciment ne soit pas désagrégé, il faut que la tension à laquelle il est soumis n'atteigne pas la limite de rupture ; elle doit être une fraction de la tension limite; fraction que nous appellerons R. Pour les matériaux que nous définissions tout à l'heure, on peut admettre que la limite est de 20^k environ par centimètre carré; la tension R_c à ne pas dépasser devrait être de moitié par exemple, ou tout au plus les 3/4 de la limite; c'est-à-dire 10^k à 15^k. A notre avis, c'est même aller bien loin, quoique la pratique semble assez volontiers se contenter d'une aussi maigre marge de sécurité.

Il faudra donc poser

$$R' = R_c. \qquad (3)$$

Telles sont les conditions imposées auxquelles il faut nécessairement satisfaire ; ces trois relations permettront de déterminer trois des quatre quantités R', R'', ω', ω''; il en reste toujours une arbitraire. C'est qu'en effet on peut faire varier à volonté les proportions de ciment et de métal, mettre plus de ciment et moins de métal, ou inversement, tout en laissant à la même pièce la même résistance.

Ordinairement, les constructeurs se fixent la règle empirique suivante : Négligeant entièrement, disent-ils, la résistance du ciment et ne faisant entrer en ligne de compte que celle du métal, ils calculent la section ω'' du métal pour qu'elle puisse, à elle seule, résister à la pression, en faisant travailler le métal à un taux fixé d'avance.

Soit R_m le travail ainsi adopté, ils posent :

$$R_m\omega'' = P. \qquad (4)$$

On peut alors déterminer les quatre quantités R', R'' ω', ω''.

Il ne faudrait pas en conclure que le métal travaillera effectivement au taux R_m ainsi choisi ; tant s'en faut. En réalité le travail du métal sera toujours R'' ou r R'. Si l'on adopte pour R' le chiffre de

10^k, et si r est à peu près 20, le travail réel ne sera que 20×10, ou 200^k, soit 2^k par millimètre, lors même qu'on aura adopté pour R_m le chiffre de 6^k, de 8^k, de 10^k. Le travail réel sera de 3, si l'on adopte 15^k pour la tension R′ du ciment.

Si l'on veut aller au fond des choses, on verra que, par la relation (4), on se donne simplement la section ω″ du métal, d'une façon arbitraire, en divisant la pression P par un chiffre de 6 à 10 millions.

Éliminant alors R′, R″, ω″, on trouve finalement

$$\omega' = \frac{P}{R_c}\left(1 - \frac{rR_c}{R_m}\right),$$

relation qui détermine l'épaisseur de ciment, d'après celle du métal qu'on a choisie; car si e' est cette épaisseur, elle est égale à ω′, section par mètre courant.

Connaissant ω″ qui est

$$\omega'' = \frac{P}{R_m},$$

on peut régler la section des fers que l'on emploie pour former les spires ou anneaux constituant les directrices de la carcasse métallique, ainsi que leur écartement; il suffit de diviser ω″ par le nombre de barreaux correspondant à l'écartement adopté, pour avoir la section de chaque fer; ou diviser ω″ par la section du fer choisi, pour avoir le nombre et l'écartement des barreaux.

Certains constructeurs, pour plus de simplicité, emploient des fers de section constante et déterminent, comme nous venons de dire, leur écartement d'après le diamètre et la pression du tuyau; d'autres préfèrent garder le même écartement et faire varier le diamètre. On peut tout aussi bien faire varier l'un et l'autre à la fois, si l'on estime que l'on réalise ainsi des proportions plus commodes ou plus avantageuses.

Nous avons dit qu'il est au moins prudent de ne pas faire travailler le ciment, dans le sens transversal, à un taux qui atteigne la limite de cohésion, si l'on ne veut que le tuyau se fendille trop facilement et laisse passer l'eau sous pression. Nous savons bien qu'au début les grandes conduites ainsi construites ne sont jamais étanches, mais qu'elles le deviennent ensuite, parce que les pores ou fissures sont rapidement bouchés, par la formation des premiers dépôts probablement, par un gonflement du ciment ou toute autre

cause. C'est pourquoi les constructeurs ne paraissent guère se préoccuper du taux que peut atteindre le travail dans ce sens, et pourquoi ils se rapprochent assez du travail limite. On peut ajouter, du reste, que si le ciment travaille trop et tend à se désagréger, les barreaux métalliques sont là pour empêcher les désordres de s'accroître, puisque, au besoin, ils sont capables, à eux seuls, d'opposer toute la résistance nécessaire.

Mais il n'en est pas de même du travail dans le sens transversal. Entre deux anneaux ou spires de métal qui lui servent d'appui, le ciment formant remplissage est abandonné à lui-même. Sous la pression il fléchit, ce qui développe un travail appréciable de tension.

Or, le ciment résiste peu à la tension ; il ne faut pas lui imposer un travail trop notable, car il se fendrait à l'extérieur ; son épaisseur serait réduite d'autant; la pièce ainsi affaiblie fléchirait plus encore qu'au début, les désordres augmenteraient rapidement jusqu'à rupture, car il n'y a pas ici de métal qui intervienne pour s'opposer à la propagation du mal.

Il faut donc s'assurer que le travail de tension qui résulte de la flexion ne dépasse pas $\frac{1}{10}$, par exemple, du travail limite que nous avons fixé à 20^k par centimètre carré.

Soit l l'écartement des anneaux ou spires ;
p la pression de l'eau par mètre carré ;
e' l'épaisseur de ciment ;

Le moment de flexion sera $\frac{pl^2}{8}$; la valeur de $\frac{I}{n}$ sera $\frac{1.00 \times e'^2}{6}$; d'après la règle ordinaire, le travail ne devra pas dépasser $20{,}000^k = \frac{3pl^2}{4e'^2}$. D'où finalement

$$e' = l\sqrt{\frac{3p}{80{,}000}}.$$

Supposons que la pression p soit de $25{,}000^k$; la quantité sous le radical est équivalente à $\frac{75}{80}$, et la valeur de e' est donc sensiblement égale à l'écartement l.

On pourrait dire que les tranches de maçonnerie appuyées sur les cercles ou spires de métal ne sont pas séparées, mais qu'elles forment un cylindre continu ; en sorte que l'on peut considérer chacune d'elles comme encastrée sur ses deux bords.

Le moment pourrait donc être réduit à $\frac{pl^2}{12}$, au lieu de $\frac{pl^2}{8}$; finalement cela permettrait de réduire l'épaisseur e' de $\frac{1}{5}$ environ; elle ne serait plus que les $\frac{4}{5}$ de l'écartement. Prenant donc e' égal à l, on lui donne une valeur maxima; d'autant plus que nous prenons $\frac{1}{10}$ pour coefficient de sécurité, tandis que l'on pourrait à la rigueur ne prendre que $\frac{1}{7}$ par exemple ou même une fraction un peu plus forte.

D'après l'écartement ou la section qu'on aura adoptés pour les barreaux métalliques, on calculera donc une première valeur de l'épaisseur e' par la méthode indiquée au début, pour régler la résistance dans le sens longitudinal.

Pour régler la résistance dans le sens transversal, nous venons de voir que l'épaisseur devrait être à peu près égale à l'écartement. On adopterait la plus grande des deux valeurs ainsi fixée.

Mais, pour n'avoir pas à majorer l'une des deux et créer ainsi un surcroît inutile de résistance dans l'un ou l'autre sens, il est naturel de faire coïncider ces deux valeurs. Pour cela, après avoir déterminé ω' ou e' par la première méthode, on prendra l'écartement l égal à cette épaisseur e'.

L'écartement étant alors fixé, on en déduira le nombre n des barreaux, et la section s de chacun d'eux d'après la section totale ω', ainsi que son diamètre δ.

Premier exemple d'application.

On demande pour des tuyaux dont les diamètres varient de $0^m.30$ à $1^m.25$, les épaisseurs de ciment à employer, le nombre et le diamètre des fils de fer à insérer dans les deux sens, avec pression de $2^{atm}.5$.

Nous allons indiquer les résultats du calcul suivant le chiffre qu'on veut adopter pour le travail normal R_c du ciment, perpendiculairement aux génératrices, et pour le travail arbitraire et de convention R_m du métal.

Les tableaux suivants donnent le nombre n des barreaux par mètre courant, leur diamètre d si la section est circulaire. Sinon, on prendra, avec une autre forme, une section équivalente.

La 3me colonne donne l'épaisseur e' du ciment.

CHARGE : 2^{atm}.5.

1° $R_c = 10^k$ par cm. q.; $R_m = 6^k$ par mm. q.

Diamètre	P	$\omega' = e' = l$	n	ω''	s mm. q.	δ
0^{m}.30	7,500^{k}	0^{m}.025	40.0	0.000625	15.6	0^{m}.0064
0^{m}.50	12,500^{k}	0^{m}.042	23.8	0.001040	43.7	0^{m}.0075
1^{m}.00	25,000^{k}	0^{m}.083	11.9	0.002080	175.0	0^{m}.0149
1^{m}.25	31,250^{k}	0^{m}.104	9.6	0.002604	271.0	0^{m}.0186

2° $R_c = 10^k$ par cm. q. $R_m = 8^k$ par mm. q.

0^{m}.30	7,500^{k}	0^{m}.028	35.7	0.000469	13.1	0^{m}.0041
0^{m}.50	12,500^{k}	0^{m}.047	21.3	0.000780	36.6	0^{m}.0068
1^{m}.00	25,000^{k}	0^{m}.093	10.7	0.001560	146.0	0^{m}.0136
1^{m}.25	31,250^{k}	0^{m}.117	8.6	0.001953	227.0	0^{m}.0170

3° $R_c = 10^k$ par cm. q.; $R_m = 10^k$ par mm. q.

0^{m}.30	7,500^{k}	0^{m}.030	33.0	0.000375	11.4	0^{m}.0038
0^{m}.50	12,500^{k}	0^{m}.050	20.0	0.000684	31.2	0^{m}.0063
1^{m}.00	25,000^{k}	0^{m}.100	10.0	0.001216	121.6	0^{m}.0125
1^{m}.25	31,250^{k}	0^{m}.125	8.0	0.001562	195.0	0^{m}.0158

Prenons une seconde série où nous élèverons à 15^{k}, au lieu de 10^{k}, le travail toléré pour la tension du ciment perpendiculairement aux génératrices :

1° $R_c = 15^k$ par cm. q.; $R_m = 6^k$ par mm. q.

0^{m}.30	7,500^{k}	0^{m}.0125	80.0	0.000625	7.8	0^{m}.0032
0^{m}.50	12,500^{k}	0^{m}.0208	48.0	0.001040	21.7	0^{m}.0052
1^{m}.00	25,000^{k}	0^{m}.0415	24.1	0.002080	86.3	0^{m}.0105
1^{m}.25	31,250^{k}	0^{m}.0520	19.2	0.002604	135.0	0^{m}.0131

2° $R_c = 15^k$ par cm. q.; $R_m = 8^k$ par mm. q.

0^{m}.30	7,500^{k}	0^{m}.0156	64.1	0.000469	7.3	0^{m}.0031
0^{m}.50	12,500^{k}	0^{m}.0260	38.5	0.000780	20.3	0^{m}.0051
1^{m}.00	25,000^{k}	0^{m}.0520	19.2	0.001560	81.2	0^{m}.0102
1^{m}.25	31,250^{k}	0^{m}.0651	15.4	0.001953	126.8	0^{m}.0128

3° $R_c = 15^k$ par cm. q.; $R_m = 10^k$ par mm. q.

0^{m}.30	7,500^{k}	0^{m}.0175	57.1	0.000375	6.5	0^{m}.0029
0^{m}.50	12,500^{k}	0^{m}.0287	34.8	0.000624	18.0	0^{m}.0048
1^{m}.00	25,000^{k}	0^{m}.0581	17.2	0.001216	70.7	0^{m}.0095
1^{m}.25	31,250^{k}	0^{m}.0728	13.7	0.001562	114.0	0^{m}.0121

D'après ces divers exemples, on peut facilement voir de quelle

façon il conviendra de faire varier l'épaisseur e' égale à l'écartement l des spires ou anneaux, et le diamètre δ de ces anneaux. Il sera facile ensuite de fixer les dimensions pour les diamètres intermédiaires.

Si l'on voulait, par grande prudence, diminuer encore plus le travail normal R_c du ciment, les formules indiquent la marche à suivre. Sur les deux exemples précédents on voit d'ailleurs assez facilement la progression que suivent les sections de fer et de ciment quand on fait varier le travail.

Deuxième exemple d'application.

On demande :

1° Quelle serait pour une conduite libre sans pression l'épaisseur à donner à un tuyau en ciment armé de $1^m.10$ de diamètre intérieur ;

2° Quelle serait l'épaisseur des fers ronds à employer et à quel écartement de mailles ;

3° Ces mêmes renseignements pour une canalisation identique, mais devant supporter une pression de 10 mètres.

On peut, comme nous l'avons déjà dit, faire varier, dans des limites assez étendues, la résistance que l'on exige soit du métal, soit du ciment ; on peut demander plus à l'une et diminuer d'autant l'autre. Le choix à faire dépend surtout de la qualité et de la nature des matériaux employés, de l'étanchéité plus ou moins parfaite, plus ou moins immédiate que l'on prétend obtenir. En un mot, il n'y a rien d'absolu dans ce genre de calcul qui laisse une assez grande marge au choix du constructeur.

Dans le cas actuel, avec pression de $10^m.00$, la pression intérieure sera de $1^m.10 \times 10{,}000^k$, ou $11{,}000^k$ par mètre courant ; sur chaque paroi elle sera de $5{,}500^k$.

Renvoyant aux éclaircissements déjà fournis, nous traiterons seulement deux cas extrêmes, l'un avec très faibles valeurs des résistances du fer et du ciment, l'autre avec valeur maxima.

Supposons que l'on ne veuille faire travailler le ciment qu'à raison de 10^k par centimètre carré, le métal qu'à raison de 6^k par millimètre :

$$R_c = 10^k \text{ par cm. q.}; \qquad R_m = 6^k \text{ par mm. q.}$$

1° La section ω' et l'épaisseur e' du ciment seront :

$$\omega' = e' = \frac{P}{R_c}\left(1 - \frac{r R_c}{R_m}\right) = \frac{5,500}{100,000}\left(1 - \frac{20 \times 100,000}{6,000,000}\right) = 0^{m}.037,$$

en adoptant 20 pour le rapport moyen des coefficients d'élasticité du fer et du ciment.

2° Réglant l'écartement l des barreaux pour que le ciment travaille à peu près également en tous sens, il faut

$$e' = 0.037 = l\sqrt{\frac{3p}{80,000}} = l\sqrt{\frac{3 \times 10,000}{80,000}} = l \times 0.610;$$

d'où

$$l = \frac{0.037}{0.610} = 0^{m}.060.$$

3° De l'écartement on déduit facilement le nombre n des barreaux nécessaires par mètre courant, la section ω'' de ces n barreaux et par conséquent la section s de chacun d'eux :

$$n = \frac{1^{m}.00}{0.06} = 17, \qquad \omega'' = \frac{5,500}{6} = 920 = 17s, \qquad s = 54 \text{ mm. q.},$$

d'où le diamètre d de chaque barreau :

$$d = 8 \text{ à } 9 \text{ millimètres.}$$

Passons à l'autre cas extrême, où la résistance du ciment serait portée à 15^k par centimètre carré, celle du fer à 10^k par millimètre.

$$R_c = 15^k \text{ par cm. q.}; \qquad R_m = 10^k \text{ par mm. q.}$$

$$\omega' = e' = \frac{5,500}{150,000}\left(1 - \frac{20 \times 150,000}{10,000,000}\right) = 0^{m}.025;$$

$$e' = 0^{m}.025 = l \times 0.610, \qquad l = \frac{0.025}{0.610} = 0^{m}.041;$$

$$n = \frac{1.00}{0.041} = 24, \qquad \omega'' = \frac{5,500}{10} = 550 = 24s, \qquad s = \frac{550}{24} = 23 \text{ mm. q.},$$

d'où finalement

$$d = 5 \text{ à } 6 \text{ millimètres.}$$

On pourra, en suivant exactement la même marche, essayer toutes les combinaisons intermédiaires si l'on veut adopter d'autres taux pour le travail des matériaux.

On demande également quelles devraient être les sections pour une conduite sans pression. S'il n'y avait effectivement aucune pression, les épaisseurs pourraient être aussi réduites que l'on voudrait ; il suffirait de constituer une paroi assez résistante pour n'avoir pas à redouter les moindres chocs ; et cela n'exigerait pas des dimensions bien fortes.

Mais il n'existe pas de conduite rigoureusement horizontale ; il y a toujours une différence de niveau entre le plan d'eau supérieur et le point d'arrivée. Il n'y aurait pas grand luxe à supposer, comme précédemment, une différence d'environ 10 mètres.

Veut-on cependant réduire davantage, après s'être assuré que les circonstances accidentelles, les arrêts, les fermetures brusques et les coups de béliers qui s'ensuivent, que les chocs produits par la perte brusque de force vive ne produiraient pas, avec la pression initiale — toujours nécessaire pour qu'il y ait écoulement — une pression d'au moins une atmosphère?

Réduisons, si l'on veut, à $\frac{1}{2}$ atmosphère. Le même calcul donnera dans les deux cas extrêmes :

$$R_c = 10^k, \qquad R_m = 6^k.$$

$$\omega' = e' = \frac{2,750}{100,000}\left(1 - \frac{20 \times 100,000}{6,000,000}\right) = 0^{m}.0183.$$

On aura :

$$e' = 0.0183 = l\sqrt{\frac{3 \times 5,000}{80,000}} = l \times 0.436, \qquad l = \frac{0.0183}{0.436} = 0^{m}.042;$$

$$n = \frac{1.00}{0.042} = 24, \qquad \omega'' = \frac{2,750}{6} = 460 = 24s, \qquad s = \frac{460}{24} = 19,$$

d'où

$$d = 5 \text{ millimètres.}$$

Avec les fortes résistances :

$$R_c = 15^k, \qquad R_m = 10^k.$$

$$\omega' = e' = \frac{2,750}{150,000}\left(1 - \frac{20 \times 150,000}{10,000,000}\right) = 0^{m}.0105;$$

$$e' = 0.0105 = l \times 0.436, \qquad l = \frac{0.0105}{0.436} = 0^{m}.024;$$

$$n = \frac{1.00}{0.024} = 42, \qquad \omega'' = \frac{2,750}{10} = 275 = 42s, \qquad s = \frac{275}{42} = 6.6,$$

d'où

$$d = 3 \text{ millimètres.}$$

Il est clair que l'on arrive, dans ce dernier cas, à des épaisseurs de ciment qui ne seraient plus acceptables en pratique pour un diamètre de conduite atteignant $1^{m}.10$. Les nécessités mêmes de fabrication s'y opposeraient, et l'on serait d'ailleurs exposé à des désagréments pour le moindre choc.

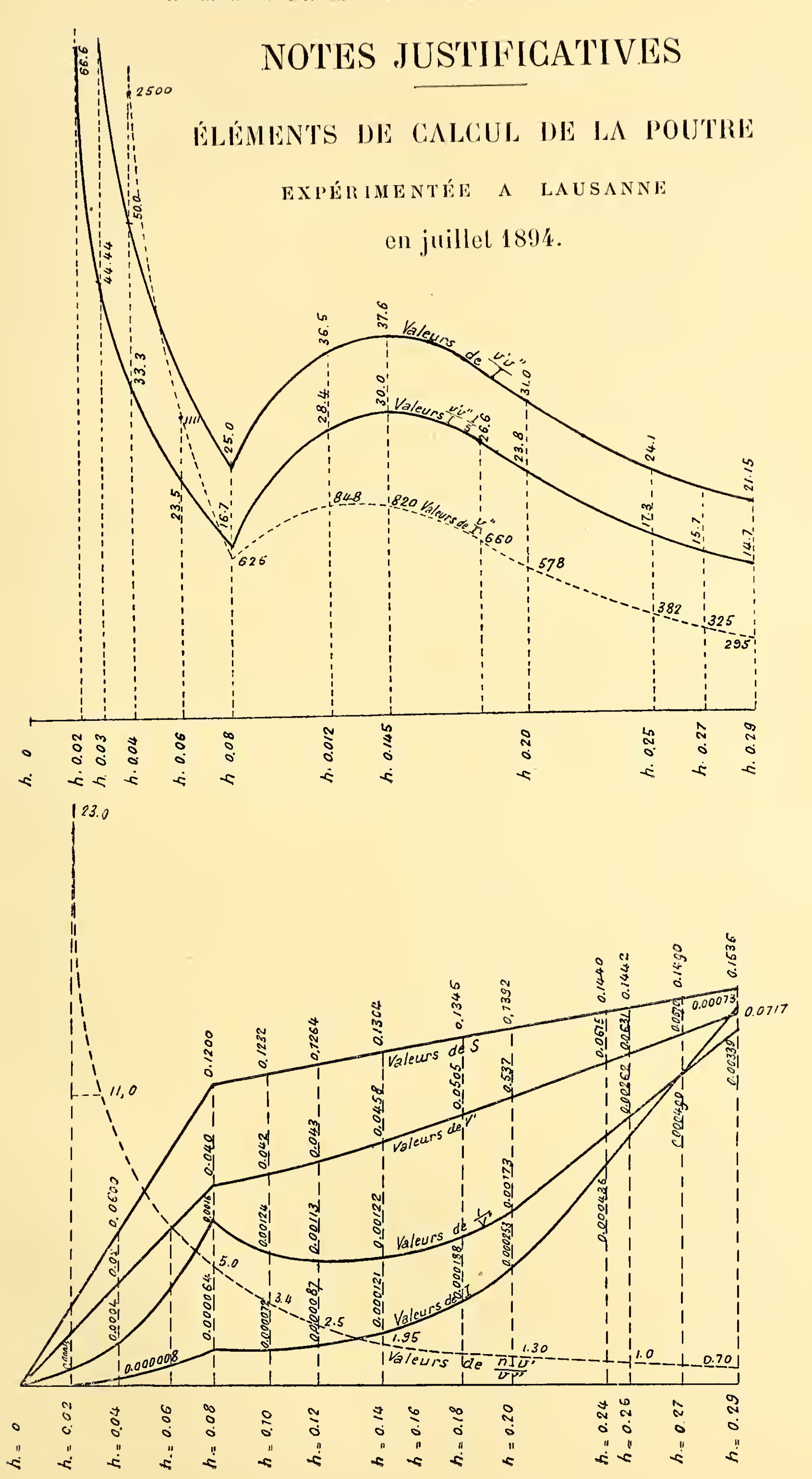
Ceci tend à corroborer, avec les raisons déjà indiquées, la nécessité de ne pas descendre les prévisions beaucoup au-dessous d'une pression intérieure estimée à une atmosphère environ.

NOTES JUSTIFICATIVES

ÉLÉMENTS DE CALCUL DE LA POUTRE

EXPÉRIMENTÉE A LAUSANNE

en juillet 1894.



NOTES

EXPÉRIENCES FAITES AU LABORATOIRE

NUMÉROS des ESSAIS.	DÉSIGNATION des ÉCHANTILLONS.	DIMENSIONS DES PLAQUES. Longueur. m			CONSTITUTION DE L'OSSATURE. Diamètre des fils. mm	Nombre de brins		Poids de l'ossature. kg
		Longueur. m	Largeur. m	Épaisseur. m		dans le grand côté.	dans le petit côté.	
					1re Série. — Distance			
1	Plaques n° 1.	1,10	0,420	0,040	4,4	10	86	9,350
2		1,10	0,400	0,038	4,4	10	86	9,350
3	Plaques n° 2.	1,10	0,400	0,043	4,4	10	26	3,500
4		1,10	0,400	0,040	4,4	10	26	3,500
5	Plaques n° 3.	1,10	0,400	0,040	4,4	10	10	2,000
6		1,10	0,400	0,040	4,4	10	10	2,000
7	Plaques n° 1.	1,10	0,445	0,040	4,4	13	11	2,250
8		1,10	0,445	0,040	4,4	13	11	2,250
9	Plaques n° 1.	1,10	0,445	0,024	4,4	12	28	4,150
10		1,10	0,440	0,022	4,4	12	28	4,150
11	Plaques n° 2.	1,10	0,420	0,023	4,4	13	8	1,750
12		1,10	0,440	0,024	4,4	13	8	1,750
13	Plaques armées par des épines.	1,10	0,450	0,042	4,4	13	42	6,150
14		1,10	0,450	0,042	4,4	13	56	8,300
15		1,10	0,430	0,045	4,4	13	68	10,250
					2e Série. — Distance			
16	N° 1.	2,10	0,435	0,043	4,4	22	85	21,250
17	N° 2.	2,10	0,425	0,040	4,4	23	26	7,750
18	N° 3.	2,10	0,400	0,040	4,4	24	11	5,000
19	Armée par des épines.	2,10	0,460	0,040	4,4	22	68	20,000

JUSTIFICATIVES

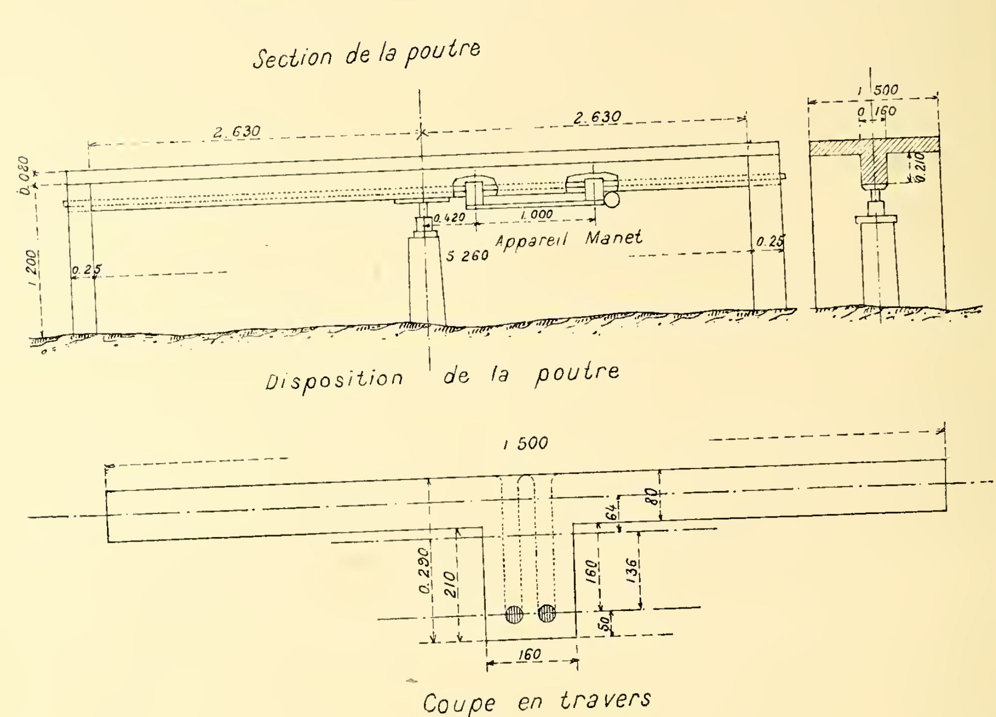
DES PONTS ET CHAUSSÉES EN 1890

DATES de la FABRICATION.	DATES de L'EXPÉRIENCE.	LIMITE D'ÉLASTICITÉ. Charge. kg	LIMITE D'ÉLASTICITÉ. Flèche. mm	CHARGE de RUPTURE. kg	OBSERVATIONS.
des appuis : 1 m.					
13 avr. 1890	13 mai 1890	220	0,7	540	Plaque essayée sens dessus dessous.
idem	idem	1300	9,8	1780	
idem	idem	1220	7,1	1620	Plaque soumise six fois à des températures de 90° à 130°, puis refroidie brusquement dans l'eau. Sans fissures.
idem	28 mai 1890	820	5,2	1420	
idem	13 mai 1890	220	1,3	480	
idem	28 mai 1890	180	0,6	580	
23 avr. 1890	23 mai 1890	180	1,9	520	
idem	idem	180	3,3	580	
idem	idem	360	19,0	560	
idem	idem	240	17,0	380	Plaque traitée comme le n° 4.
idem	13 mai 1890	120	10,9	170	
idem	23 mai 1890	120	14,3	220	N° 13. 0,15 m
15 avr. 1890	15 mai 1890	2600	1,0	non rompue	N° 14. 0,21 m
idem	idem	3200	0,8	non rompue	La résistance de l'appareil n'était pas suffisante pour pousser plus loin les essais.
idem	Ne pouvait être utilement expérimentée à raison des résultats obtenus avec les précédentes.				N° 15. 0,31 m
des appuis : 2 m.					
19 avr. 1890	19 mai 1890	740	30,5	980	
idem	idem	320	26,6	460	
idem	idem	120	6,3	240	
23 avr. 1890	23 mai 1890	3400	2,6	non rompue	N° 19. 0,31 m

NOTES JUSTIFICATIVES

ESSAIS D'UNE POUTRE EN SIDÉRO-BÉTON

CONSTRUITE EN JUILLET 1893, A LAUSANNE.



EXPÉRIENCE DU 10 AOUT 1894.

Etaient présents, outre le signataire :

MM. de Mollins, ingénieur, à Lausanne ;
Schüle, ingénieur du contrôle fédéral des chemins de fer ;
Gonin, ingénieur en chef des travaux publics du canton de Vaud :
Vautier, ingénieur, représentant M. le colonel Lochman, chef de l'arme du Génie ;

MM. Dapples, directeur de l'école d'Ingénieurs;
Elskes, ingénieur des Ponts de la Compagnie Jura Simplon;
Orpiszewski, de la même Compagnie;
E. Chavannes, ingénieur de la ville de Lausanne.

On a d'abord procédé le matin à une première série d'épreuves. L'allongement des fers a été observé au moyen de l'appareil Manet, et les flèches au milieu, en mesurant au moyen d'un palmer la distance de deux index, l'un fixe, l'autre mobile. On a aussi observé les flèches à 80 c/m de l'axe au moyen d'un appareil enregistreur qui multipliait la flèche par 5.

La charge a été obtenue au moyen de sacs de sable du poids de 50 kilog. uniformément répartis sur toute la surface de la poutre.

EXPÉRIENCES DU MATIN.

Poids.	Flèche au milieu.	Tension.
2,200k	1.53mm	2.0k mm2
4,500k	3.61	7.3
5,000k	4.45	8.6
6,000k	5.53	10.3
7,000k	6.30	12.4
6,000k	6.38	11.3
5,000k	5.59	9.9
4,500k	5.02	8.8
4,000k	4.66	8.5
2,000k	3.45	5.4
0	1.39	1.6

L'expérience est discontinuée à 11 h. 40 et reprise à 2 h. 50. On observe alors:

Flèche au milieu, 0.6mm. Tension du fer, 1.6.

On a alors rechargé la poutre.

Poids.	Flèche au milieu.	à 80 cm de l'axe.	Tension.
0	0. 6mm	—	1.6k mm2
5,000k	5.14	—	9.5
7,000k	6.81	—	12.4
8,000k	7.86	—	14.5

A ce moment on constate une fissure à la partie inférieure au droit d'une des entailles faites pour loger les appareils indicateurs

Poids.	Flèche au milieu.	à 80 cm. de l'axe.	Tension.
9,000ᵏ	9.22ᵐᵐ	—	16.0 $^{k\ mm2}$

On constate deux fissures à la partie inférieure du côté de l'appareil Manet et deux de l'autre côté de l'axe.

La limite d'élasticité du fer étant dépassée, les chiffres y relatifs n'indiquent plus que des valeurs relatives et non pas des kilogrammes.

Poids.	Flèche au milieu.	Tension.
10,000ᵏ	10.60ᵐᵐ	17.5
11,000ᵏ	12.40	21.3
12,000ᵏ	14.23	23.8
13,000ᵏ	16.32	27.3
14,000ᵏ	18.51	31.0
15,000ᵏ	24.50	—

A partir de 15,000 kil. l'appareil Manet ne peut plus fonctionner par suite de la flexion des tirants.

Les flèches ne peuvent plus être observées au milieu, les observations de l'enregistreur demandent à être réduites.

A 16,000 kil. on observe des fentes sur les culées de 0.20 d'épaisseur, elles doivent être étayées.

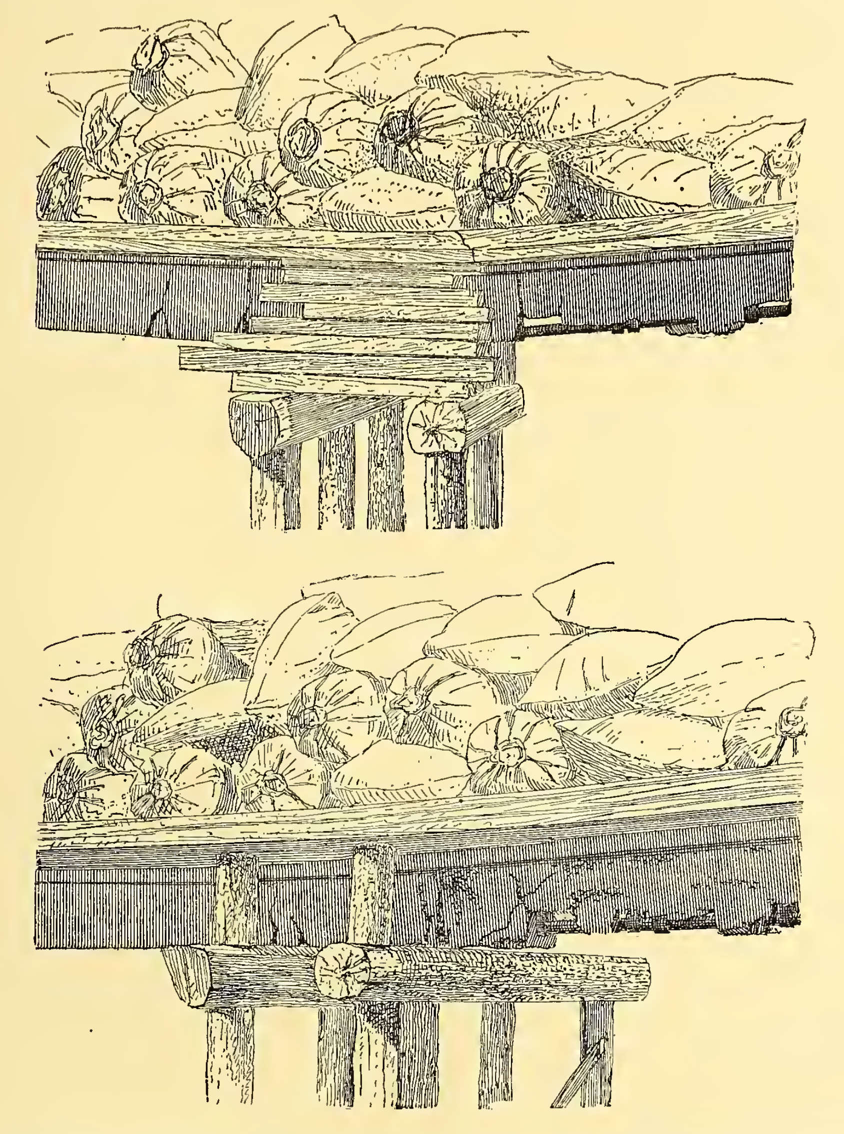
A 18[1] tonnes de chargement, la poutre jugée rompue (toutes les fentes ayant plus d'un milimètre d'ouverture) vient reposer sur des chevalets placés au centre, et distants à l'origine de 6 $^{m}/_{m}$.

Elle possède encore une certaine élasticité, mais comme les tirants sont chargés bien au delà de leur limite d'élasticité, ils auraient probablement fini par s'allonger jusqu'à rupture de la poutre.

La flèche latérale du hourdis dépassait 6 $^{c}/_{m}$ et tout son ensemble était absolument gauchis. Cependant on n'a pas observé de fentes, sauf quelques petites existant au commencement de l'expérience, seu-

lement d'un côté, et qui ne se sont pas ouvertes. Aucune trace d'un commencement d'écrasement du ciment n'a été remarquée.

Le lendemain matin, 11 courant, Messieurs les ingénieurs de Mollins et E. Chavannes ont remarqué que la poutre déchargée à



concurrence de 5^T s'était relevée de $10\,^m/_m$; déchargée de 18^T, elle s'est relevée de $18\,^m/_m$.

La partie supérieure de la dalle restée en partie infléchie ne présente aucune fissure, aucune trace d'un commencement d'écrasement.

Les tirants d'armature en fer rond ont présenté une diminution de diamètre moyenne de 13/100 de millimètres constatée dans les entailles faites pour loger les appareils indicateurs.

Genève, le 11 août 1894.

BOIN.

EXPÉRIENCE DE RUPTURE DU 29 AOUT 1894.

Etaient présents, outre le soussigné :

MM. de Mollins et Ferrari;
Duboux, Orpiszewski, Schenk, Daumer.

Portée de la poutre : $5^{m}.25$

Poids entre appuis : $1,863^{k}$

Surcharges.	Flèches relatives.		
$4,600^{k}$	3.3^{mm}	6.7	
$7,000^{k}$	6.1	11.2	
$9,000^{k}$	8.1	14.1	
$11,000^{k}$	11.1	18.6	
$13,000^{k}$	13.1	22.1	
$15,000^{k}$	15.2	26.0	
$17,000^{k}$	17.4	29.7	
$19,000^{k}$	23.7	34.2	
$21,000^{k}$	35.1	75.5	93.0
$23,000^{k}$	79.0	157	

A ce moment le béton s'écrase. Des fentes dans les hourdis, continuation de celles de l'âme, se sont produites entre 15,000 et 17,000 kil. Ces fentes, dont une sensiblement au milieu de la portée, s'avancent jusqu'aux 2/3 de l'épaisseur du hourdis. A 23,000 kil. le béton commence à s'écraser au milieu, la hauteur de la partie écrasée n'est que de 25 m/m.

Le moment de charge est alors :

$$m = \frac{1}{8} \times (23,000 + 1,863)5.25 = 16,320^{k}$$

Le bras de levier du moment au milieu de la section comprimée étant 23 $^c/_m$ on a sensiblement :

$$\text{Tension des tirants} = \text{Compression du béton} = \frac{16320}{0.23}.$$

$$T = C = 71,000^k$$

La section active du béton étant réduite à $2.5 \times 150\ ^c/_m = 375\ ^c/_m{}^2$, le travail par $^c/_m{}^2$ est donc :

$$\frac{71000}{375} = 189^k\ cm^2.$$

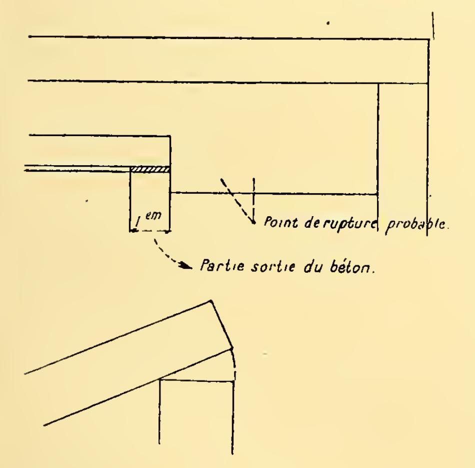
Les deux tirants mesurant en moyenne 30 $^m/_m$ de diamètre ont une section totale de 1414 $^m/_m{}^2$.

Le travail du fer par $^m/_m{}^2$ a donc été :

$$F = \frac{71000}{1414} = 50^{k\ mm2}.$$

Ce chiffre est plus grand que celui qu'on admet pour le fer doux ordinaire. Cela peut tenir à deux causes. Il est possible que le fer employé se rapproche un peu de l'acier doux dont la charge de rupture est supérieure à celle du fer forgé, ensuite l'allongement lent du fer peut augmenter sa tenacité.

La poutre sous la surcharge de 23,000 kil. se soutient encore. On porte alors cette surcharge à 25,000 kil. Au moment où on ajoute les deux derniers sacs, la poutre s'est affaissée brusquement, bien rompue cette fois.



Le scellement du fer aux extrémités n'a pas bougé. Les tirants se sont séparés du béton d'environ 1 $^c/_m$; il y a dû avoir une rupture ou un allongement équivalent à l'intérieur du béton ; d'autre part, les scellements au ciment qui fixent les étriers sur les tirants n'ont pas bougé.

Longtemps avant la rupture, la poutre s'était complètement séparée de ses appuis, qui étaient fortement contrebuttés. Il n'y a pas eu de

poussée longitudinale importante, la poutre ne s'est séparée que par suite de sa flexion.

Genève, le 30 août 1894.

BOIN.

NOTA.

Le 1er septembre, les fers ont été mis à nu dans toute la longueur de la poutre ; il a été alors constaté qu'ils ne présentaient aucune rupture ni aucune crique. Ils étaient allongés, dans la partie médiane, de la valeur des crevasses inférieures de la poutre et par conséquent décollés dans cette partie de leur gaine en ciment. Aux deux extrémités, sur environ 0m.80, ils ne présentaient aucun symptôme d'allongement ni de décollement, et la poutre n'avait aucune crevasse ; par conséquent, la traction considérable, qui a produit l'allongement du fer dans sa partie médiane, ne s'est pas transmise aux extrémités.

NOTES JUSTIFICATIVES

GITAGE A L'ÉPREUVE DU FEU

EXPÉRIENCES FAITES A BRUXELLES.

Poutre n° 2, moulée sur moules en planches,
le 5 juillet 1892.

(Même type que le n° 3.)

Matériaux.

Fer, 2 barres de $0^m.022$ de diamètre, pesant $2,957^k$ par mètre courant.
Béton, 200^k ciment Portland à prise lente,
$0^{m3}.200$ sable d'Uecle,
$0^{m3}.500$ gravier de Lessines.
Portée, $5^m.00$. — Charge, $2,400^k$. — Flexion, 2.10 mm.

Expériences des 14-15 juillet 1892.

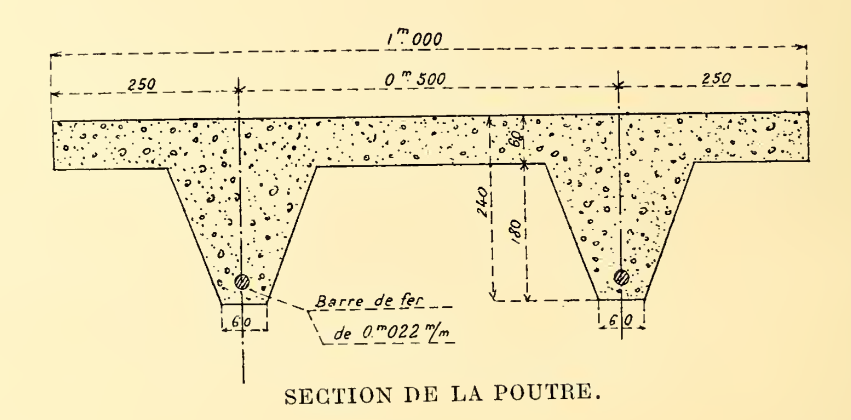
Charges uniformément réparties.	Flexions observées en mm. totales.	Flexions observées en mm. partielles.	Relèvements obs. en mm. totaux.	Relèvements obs. en mm. partiels.	Charges.
			10.50	2.30	à 0^k
à 700^k	1.60	1.60	8.20	1.20	à 700^k
à $1,400^k$	3.50	1.90	7.00	1.40	à $1,200^k$
à $2,000^k$	5.20	1.70	5.60	2.10	à $1,700^k$
à $2,400^k$	7.30	2.10			
Le 15 juillet, continué à charger.			3.50	1.30	à $2,200^k$
à $2,700^k$	8.05	0.75	2.20	1.20	à $2,700^k$
à $3,200^k$	10.30	2.25	1.00	1.00	à $3,200^k$
à $3,700^k$	13.05	2.75	»	»	

La poutre a été déchargée, elle a donné les relèvements (voir col. 4 à 6). Il est resté un affaissement de 2.55 mm., mais il avait copieusement plu pendant la nuit du 14 au 15 juillet. La poutre n'ayant conservé aucune flèche, nous en concluons que l'affaissement est dû à un léger tassement de la terre sous les appuis.

Cette poutre est construite pour planchers pouvant porter 200^k de surcharge par mètre carré.

EXPÉRIENCES FAITES A BRUXELLES.

Poutre n° 3, moulée sur moules en planches,
le 7 juillet 1892.



SECTION DE LA POUTRE.

Au moment de la rupture, l'appui du milieu était placé à une distance de 20 à 25 mm. sous la poutre.

Matériaux.

Fer, 2 barres de 0^{m}022 de diamètre, pesant 2,957^k par mètre courant.
Béton, 200^k ciment Portland à prise lente,
0^{m3}.200 sable d'Uecle,
0^{m3}.500 gravier de Lessines.

Portée, 4^m.70. — Charge de rupture : 6,500^k.

Expérience du 15 juillet 1892.

Charges uniformément réparties.	Flexions observées en mm.	
	totales.	partielles.
à 500k	1.00	1.00
à 1,000k	1.80	0.80
à 1,500k	2.50	0.70
à 2,000k	4.00	1.50
à 2,500k	6.00	2.00
à 3,000k	8.00	2.00
à 3,700k	12.00	4.00 (3)
à 4,200k	15.00	3.00
à 4,700k	17.25	2.25
à 5,200k (1)	22.00	4.75
à 5,400k	26.00	4.00
à 5,900k	31.00	5.00
à 6,100k	36.25	5.25
à 6,500k	rupture (2)	

(1) A 5,200 k., nous avons laissé la poutre sous charge pendant deux heures et demie, la flexion ne s'est pas aggravée.

(2) La rupture s'est produite par défectuosité dans le béton, qui avait été coulé trop liquide et sous l'effort tranchant par la première cassure vers l'appui.

(3) De 3,000 à 3,700 k.. la poutre s'est décollée de l'appui de droite sur lequel elle était fixée par l'adhérence du béton.

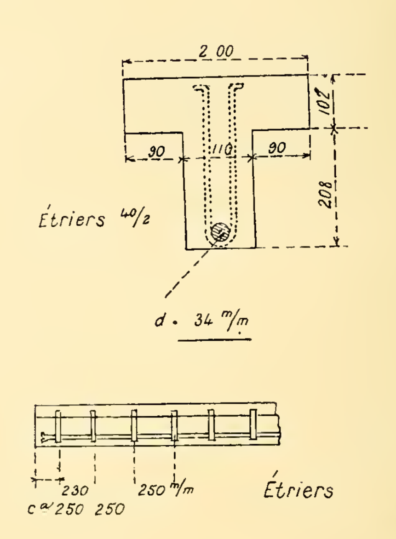
NOTES JUSTIFICATIVES

ESSAIS DES POUTRES

PRÉPARÉES EN AOUT 1894 A L'ENTREPOT DE LAUSANNE ET DÉTRUITES LE 29 DÉCEMBRE 1894.

Première poutre.

Pression en atmosph.	Flèches observées mm.
5	»
0	0
10	2.7
0	0
15	5
0	1.5
c^a 18	rupture 13.3



6 vérins : diamètre 115 mm.

$$\omega = 10386 \text{ mm}^2$$

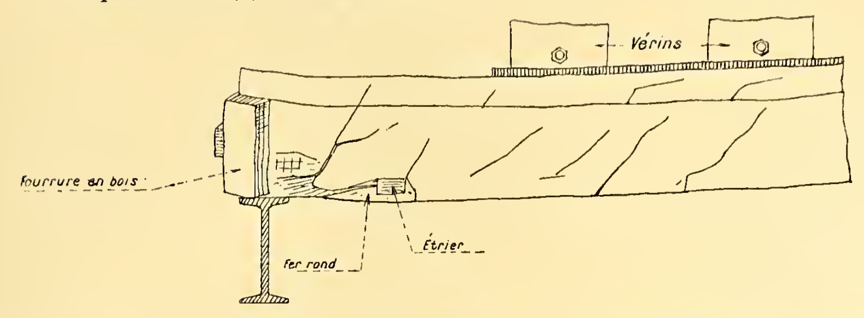
$$\omega = 104 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ atm.} = 104^{\text{k}}$$

pour chaque vérin.

Les vérins hydrauliques sont communiquants.

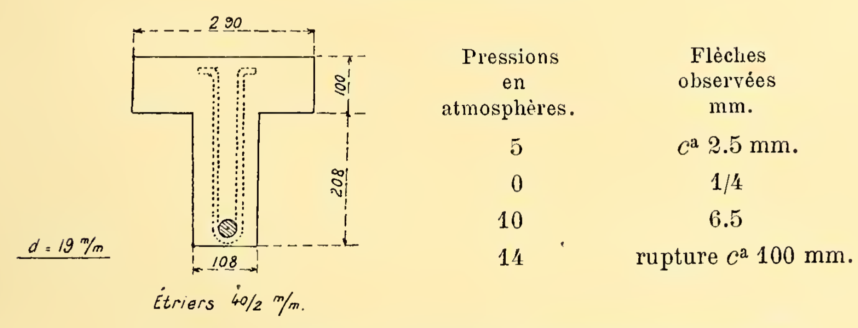
Rupture à l'appui de gauche, voir le croquis ci-dessous.



Rupture qualifiée d'anormale par M. de Mollins, qui n'avait jusqu'ici eu que des ruptures au milieu de la poutre.

Il n'y avait pas d'étrier à l'extrémité (voir le croquis ci-dessus), malgré les indications de M. de Mollins.

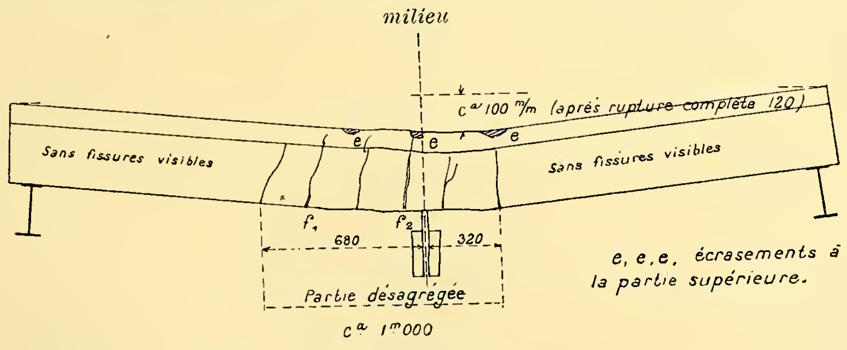
Deuxième poutre.



Pressions en atmosphères.	Flèches observées mm.
5	c^a 2.5 mm.
0	1/4
10	6.5
14	rupture c^a 100 mm.

(Rupture subite au milieu et chute sur les cales).

Le fer n'est pas cassé, il est allongé au milieu.



Largeur des fentes : f_1 environ 5 mm.

— f_2 — 10 mm. (après rupture complète, 2 cm.)

Troisième poutre.

(La poutre est placée sens dessus dessous.)

Profil comme ci-dessus

$d = 19$ mm.

L'ouvrier ayant pompé trop vite, la pression s'est élevée presque tout d'un coup et la rupture a eu lieu immédiatement (le manomètre a indiqué jusqu'à 13 atmosphères), et on n'a pu mesurer aucune flèche.

On décide d'essayer la même poutre reposée à l'endroit.

Troisième poutre bis.

Poutre n° 3 remise droite.

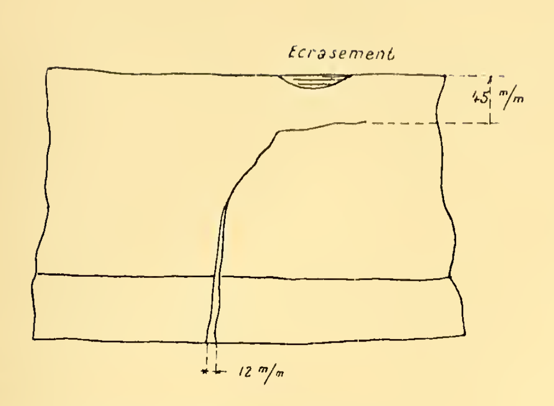
Pression en atmosph.		Flèches observées.
5		6 mm.
10	(moment de la rupture)	17.5
10	après la rupture	24.5

Cette poutre est la même qu'à l'essai III ; elle avait donc déjà été cassée en sens inverse. Le fer n'est qu'allongé au milieu.

Quatrième poutre.

(La poutre est placée sens dessus dessous.)

Profil comme à la poutre I. — Diamètre de l'armature, 33.5 mm.



Pression en atmosph.	Flèches observées mm.
3	0.25
4	0.25
5	0.25
7	0.25
0	0
10	0.75
11 (rupture)	7.4
0	6.15

3 rupture complète et chute sur les calages.

1 seul verrin au milieu.

TABLE DES MATIÈRES

THEORIE DES POUTRES DROITES EN FER ET CIMENT

PRINCIPES GÉNÉRAUX.

CHARGE UNIFORMÉMENT RÉPARTIE.

POIDS UNIQUE AU MILIEU.

COMPARAISON AVEC LES RÉSULTATS D'EXPÉRIENCES.

Travail limite des matériaux.

Comparaison des flèches calculées et observées.

Comparaison des charges normales et des charges limites.

Efforts tranchants et de glissement longitudinal.

RÉSUMÉ.

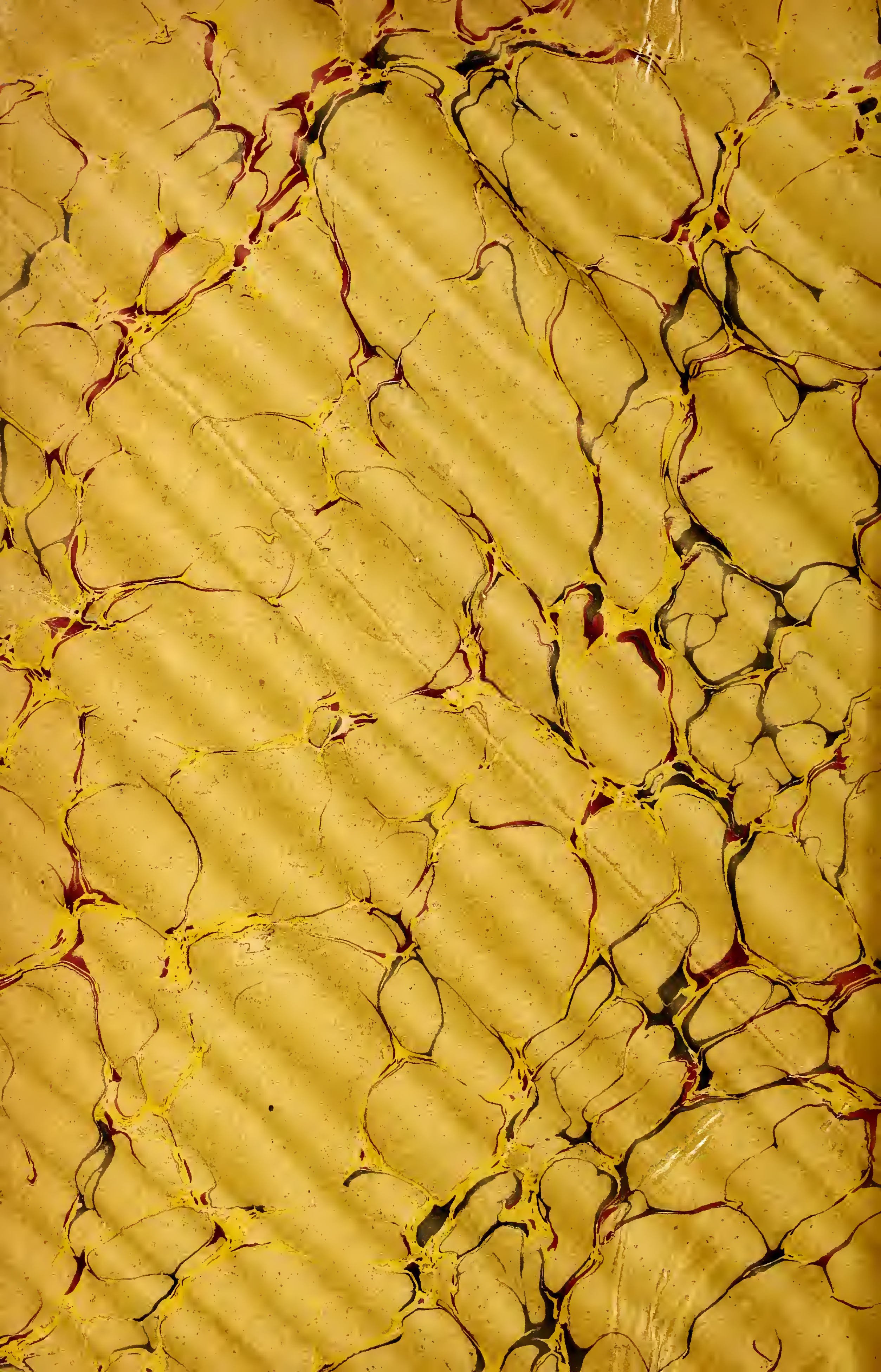
Formules pratiques.

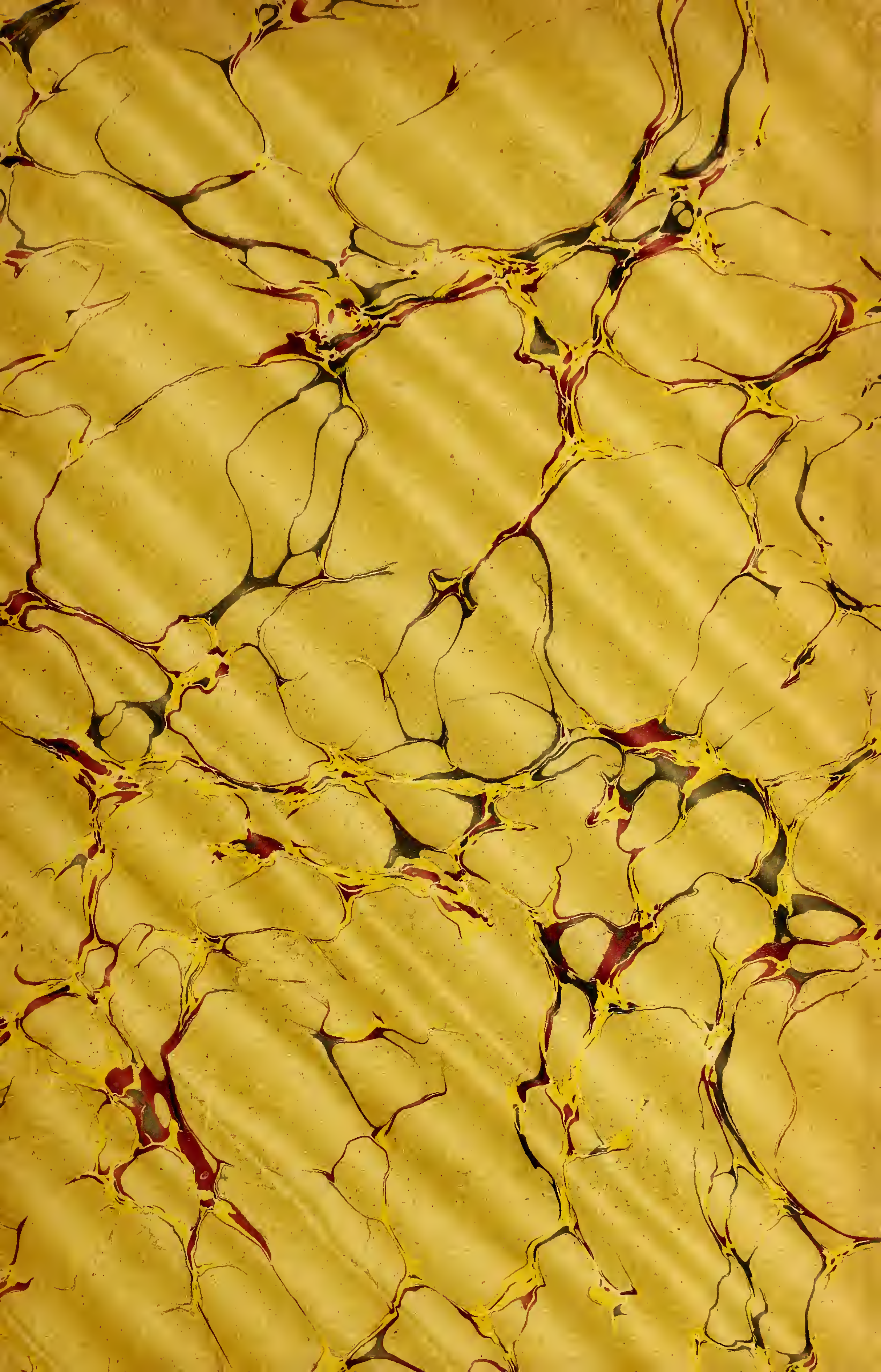
Tableaux graphiques.

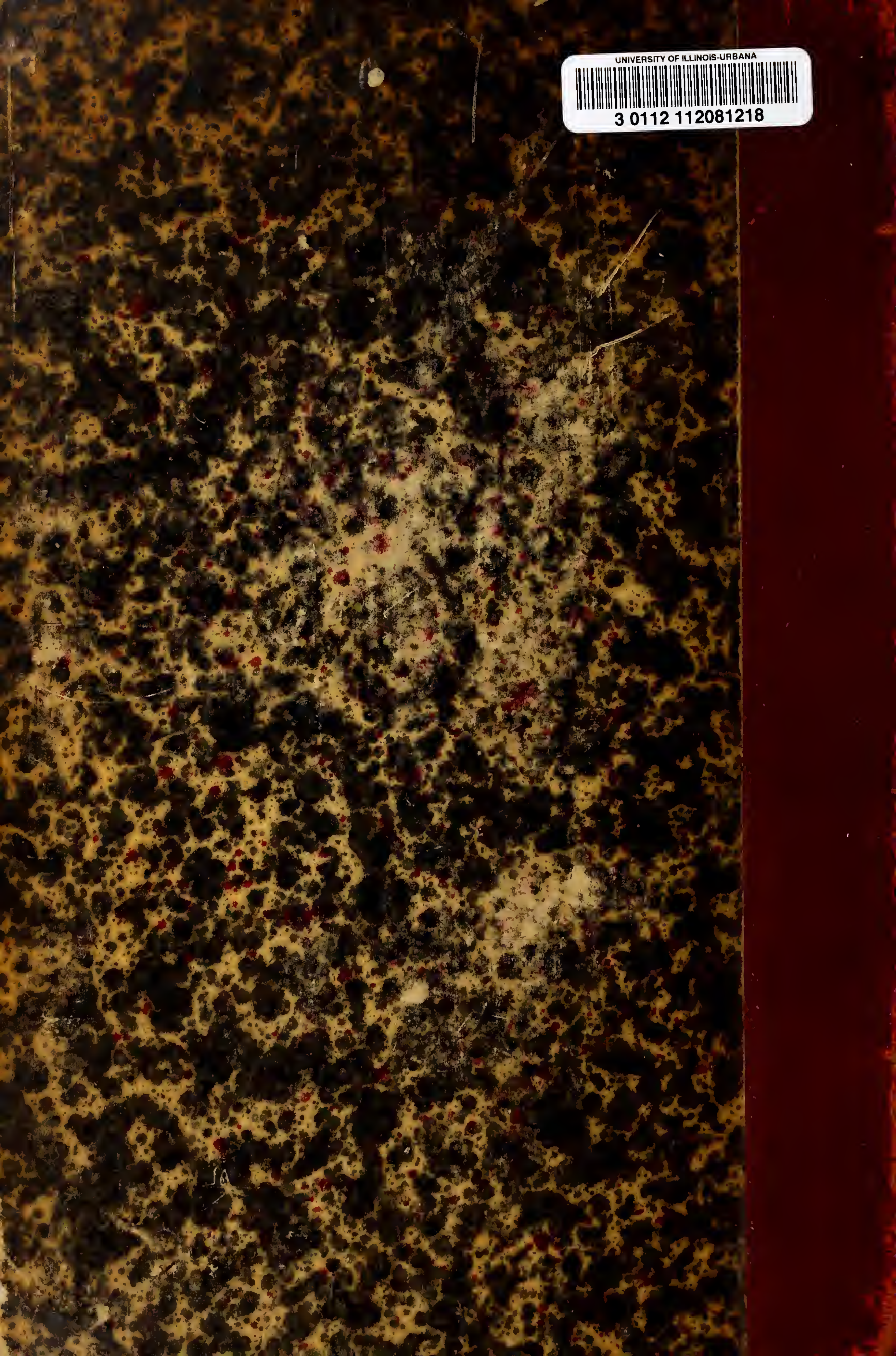
Epaisseur des tuyaux en ciment armé.

Notes justificatives.

LEVALLOIS-PERRET. — IMP. CRÉTÉ DE L'ARBRE, 55, RUE FROMONT.






UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
3 0112 112081218